

**ВАРИАНТЫ РАБОТ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ  
НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ  
В КАЗАХСТАНСКИЙ ФИЛИАЛ МГУ  
И ОЛИМПИАДАХ В 2007 году**

---

**МАТЕМАТИКА**

*Олимпиада «Абитуриент — 2007» (апрель)*

**ВАРИАНТ I**

1. Решить неравенство

$$\frac{2|x| + 1}{2 + x} \geq 1.$$

2. Работая вместе, две бригады затратят на выполнение производственного задания на 3 часа меньше, чем требуется одной из них и на 5 часов 20 минут меньше, чем необходимо другой. За какое время каждая бригада может выполнить это задание?

3. Решить неравенство

$$x \sin x + 1 \geq x + \sin x.$$

4. Решить уравнение

$$\cos \sqrt{x} + \cos \sqrt{|x - 100\pi^2|} = 2.$$

5. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{1 - \log_{x^2+x}(6 - 2x - 2x^2)}.$$

6. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  треугольники  $ABD$  и  $DBC$  подобны. Найти длину диагонали  $AC$ , если  $|AB| = |AD| = 2$ ,  $|BC| = 1$  и  $|BD| < 1, 4$ .

7. Решить уравнение

$$1 - x^2 = \sqrt{2 - 2x\sqrt{2}}.$$

8. В треугольную пирамиду  $ABCD$  вписана сфера радиуса  $r$ . Известно, что площади треугольников  $ABD$ ,  $ABC$  и  $ADC$  равны  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  соответственно, а  $ABC$  и  $DBC$  — равнобедренные прямоугольные треугольники с гипотенузой  $BC$ . Угол между прямыми  $AB$  и  $DC$  равен  $\alpha$ . Найти расстояние между этими прямыми.

**ВАРИАНТ II**

1. Решить неравенство

$$\frac{2|x|}{1 + x} \leq 1.$$

2. Два экскаватора, работая вместе, могут проложить траншею на 4 часа быстрее, чем один из них и на 6 часов 15 минут быстрее, чем другой. За сколько часов может самостоятельно проложить эту траншею каждый экскаватор?

3. Решить неравенство

$$x + \cos x \geq x \cos x + 1.$$

4. Решить уравнение

$$\cos |x| + \cos \sqrt{|x^2 - 52\pi^2|} = 2.$$

5. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{1 - \log_{x^2-x}(4 + 2x - 2x^2)}.$$

6. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  треугольники  $ABC$  и  $CDA$  подобны. Найти длину диагонали  $BD$ , если  $|AB| = |BC| = 3$ ,  $|CD| = 1$  и  $|CA| < 1,7$ .

7. Решить уравнение

$$1 - x^2 = \sqrt{2 + 2x\sqrt{2}}.$$

8. В треугольную пирамиду  $KLMN$  вписан шар радиуса  $R$ . Известно, что площади треугольников  $KLM$ ,  $KLN$ ,  $KMN$  равны  $a$ ,  $b$ ,  $c$  соответственно, а  $KLM$  и  $LMN$  – равнобедренные прямоугольные треугольники с гипотенузой  $LM$ . Расстояние между прямыми  $KL$  и  $MN$  равно  $d$ . Найти угол между этими прямыми.

**Решения.**

### ВАРИАНТ I

#### Решение

1. Запишем исходное неравенство в следующем виде

$$\frac{2|x| + 1}{2 + x} - 1 \geq 0$$

$$\frac{2|x| - x - 1}{2 + x} \geq 0.$$

Рассмотрим значения  $x > -2$ . В этом случае знаменатель  $2 + x$  положителен, поэтому последнее неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} x > -2 \\ 2|x| - x - 1 \geq 0 \end{cases}.$$

Если  $x \geq 0$ , тогда неравенство  $2|x| - x - 1 \geq 0$  принимает вид  $2x - x - 1 \geq 0$  или  $x \geq 1$ . Значит промежуток  $[1, +\infty)$  является решением исходного неравенства. Если же  $-2 < x < 0$ , то  $2|x| - x - 1 \geq 0$  принимает вид  $-2x - x - 1 \geq 0$  или  $-1 \geq 3x$ ,  $x \leq -1/3$ . Следовательно, значения  $-2 < x \leq -1/3$  является решением данного неравенства.

При  $x < -2$  знаменатель  $2 + x$  отрицателен, а числитель  $2|x| - x - 1 = -3x - 1$  положителен. Поэтому дробь  $\frac{2|x|-x-1}{2+x}$  отрицательна на интервале  $(-\infty, -2)$ , и наше неравенство не имеет здесь решений.

*Ответ:*  $(-2, -1/3] \cup [1, +\infty)$ .

2. Пусть  $\alpha$  – производительность первой бригады в час, а  $\beta$  – производительность второй бригады в час. Тогда  $\alpha + \beta$  – производительность двух бригад в час. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha+\beta} + 3 \\ \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{16}{3} \end{cases}.$$

Умножим оба уравнения на  $\alpha + \beta$ . Получаем эквивалентную систему

$$\begin{cases} 1 + \frac{\beta}{\alpha} = 1 + 3(\alpha + \beta) \\ 1 + \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \frac{16}{3}(\alpha + \beta) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} = 3(\alpha + \beta) \\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{16}{3}(\alpha + \beta) \end{cases}$$

Перемножив уравнения последней системы получим равенство

$$1 = 16(\alpha + \beta)^2.$$

Откуда  $\frac{1}{\alpha + \beta} = 4$ . Второй корень является посторонним, так как по условию задачи  $\alpha + \beta > 0$ . Остается подставить полученное значение в каждое уравнение исходной системы.

*Ответ: 7 часов; 9 часов 20 минут.*

3. Перенесем все слагаемые в левую часть и сгруппируем. Получим следующее неравенство

$$(x - 1) \sin x + 1 - x \geq 0.$$

Разлагая левую часть последнего неравенства на множители будем иметь

$$(x - 1)(\sin x - 1) \geq 0.$$

1 способ решения. Составим две системы

$$\left[ \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ \sin x - 1 \geq 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{cases} x \geq 1 \\ \sin x \geq 1 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{cases} x \geq 1 \\ \sin x = 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \right] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n = 0, 1, 2, \dots$$

2 способ решения. Заметим, что  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  – решение неравенства (). При остальных значениях  $x$  второй множитель в левой части неравенства () отрицателен. Поэтому еще решения будут только в случае, когда первый множитель  $x - 1 \leq 0$ . То есть  $x \leq 1$ .

*Ответ:  $(-\infty, 1] \cup \{\frac{\pi}{2} + 2\pi n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ .*

4. Так как при любом значении аргумента  $\varphi$  функция  $\cos \varphi \leq 1$ , то данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \cos \sqrt{x} = 1 \\ \cos \sqrt{|x - 100\pi^2|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2\pi k, & k = 0, 1, 2, \dots \\ \sqrt{|x - 100\pi^2|} = 2\pi m, & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Отрицательные значения параметров  $k$  и  $m$  исключаются, так как левая часть каждого из уравнений последней системы неотрицательна. Выразим значение  $x$  из первого уравнения и подставим во второе. Получим уравнение

$$|k^2 - 25| = m^2 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Если  $k^2 \leq 25$ , то есть  $k \leq 5$ , тогда последнее соотношение принимает вид  $k^2 + m^2 = 25$ . Откуда  $k = 0, 3, 4, 5$ . Если же  $k^2 > 25$ , то имеем уравнение  $k^2 - m^2 = 25$  или

$(k - m)(k + m) = 25$ . Учитывая, что  $k$  и  $m$  – целые неотрицательные числа и  $k > m$  можем записать систему

$$\begin{cases} k - m = 1 \\ k + m = 25 \end{cases} \Leftrightarrow 2k = 26 \Leftrightarrow k = 13.$$

Ответ:  $0; 36\pi^2; 64\pi^2; 100\pi^2; 676\pi^2$ .

5. Рассмотрим случай, когда основание логарифма удовлетворяет условию  $0 < x^2 + x < 1$ . Тогда неравенство  $1 - \log_{x^2+x}(6 - 2x - 2x^2) \geq 0$  эквивалентно неравенству  $6 - 2x - 2x^2 \geq x^2 + x$ . Имеем систему

$$\begin{cases} 0 < x^2 + x < 1 \\ 6 \geq 3x^2 + 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ x^2 + x < 1 \\ x^2 + x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ x^2 + x < 1 \end{cases}$$

Решая уравнения  $x^2 + x = 0$  и  $x^2 + x = 1$  найдем, что решениями исходной системы являются интервалы  $\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; -1\right)$  и  $\left(0; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ .

Если основание логарифма больше 1, то имеем систему

$$\begin{cases} x^2 + x > 1 \\ 0 < 6 - 2x - 2x^2 \geq x^2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x > 1 \\ x^2 + x \geq 2 \\ x^2 + x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \geq 2 \\ x^2 + x < 3 \end{cases}$$

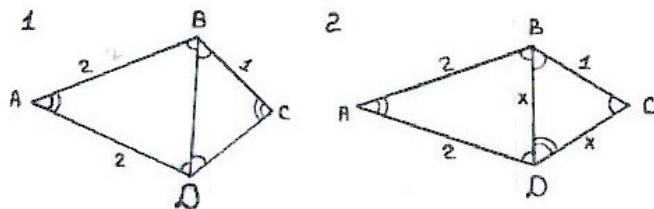
Находим корни уравнений  $x^2 + x = 2$  и  $x^2 + x = 3$ . Решениями последней системы являются множества  $\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; -2\right]$  и  $\left[1; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right)$ .

Ответ:  $\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; -2\right] \cup \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; -1\right) \cup \left(0; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left[1; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right)$

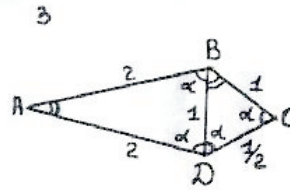
6. Треугольник  $ABD$  – равнобедренный. Следовательно, углы при его основании равны. В подобных треугольниках соответственные углы равны. Рассмотрим три случая расположения углов в треугольнике  $BCD$ .

1)  $AD \parallel BC$ , так как внутренние накрестлежащие углы при секущей  $BD$  равны. Аналогично получаем  $AB \parallel CD$ . Следовательно,  $ABCD$  – параллелограмм, что невозможно, так как  $BC = 1 \neq 2 = AD$ .

2) Треугольник  $BDC$  – равнобедренный, следовательно  $BD = DC = x$ . Треугольники  $ABC$  и  $BDC$  подобны, откуда  $\frac{x}{1} = \frac{2}{x}$ . Откуда получаем  $x^2 = 2$  или  $x = \sqrt{2}$ , что противоречит условию, так как  $BD = \sqrt{2} > 1, 4$ .



3) Треугольники  $ABC$  и  $BCD$  подобны, тогда  $\frac{1}{CD} = \frac{2}{1}$ . Откуда  $CD = \frac{1}{2}$ . Обозначим через  $\alpha$  углы при основаниях  $ABC$   $BCD$ .



Согласно теореме косинусов из  $BCD$  имеем равенство

$$1 = 1 + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= 4 + \frac{1}{4} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 2\alpha = 4 + \frac{1}{4} - 2(2 \cos^2 \alpha - 1) = \\ &= 4 + \frac{1}{4} - 2\left(2 \cdot \frac{1}{4} - 1\right) = 4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = 6. \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{6}.$$

Ответ:  $\sqrt{6}$ .

7. Правая часть уравнения неотрицательна. Следовательно, решения уравнения удовлетворяют неравенству  $1 - x^2 \geq 0$  или  $1 \geq |x|$ . Возводя обе части в квадрат, получаем

$$1 - 2x^2 + x^4 = 2 - 2x\sqrt{2}.$$

Левая часть последнего неравенства неотрицательна, поэтому его решения содержатся в ОДЗ исходного уравнения:  $2 - 2x\sqrt{2} \geq 0$ . Перенеся все слагаемые в левую часть и приводя подобные члены, имеем

$$x^4 - 2x^2 + 2x\sqrt{2} - 1 = 0.$$

Далее

$$x^4 - 2\left(x^2 - x\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$x^4 - 2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0.$$

$$\left[x^2 - \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left[x^2 + \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0.$$

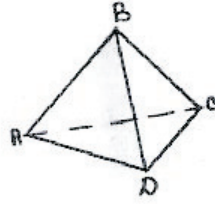
$$(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x - 1) = 0.$$

$$\begin{cases} (x^2 - \sqrt{2}x + 1) = 0 \\ (x^2 + \sqrt{2}x - 1) = 0 \end{cases}.$$

Первое из которых не имеет корней, а корни второго  $x_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ ,  $x_2 = \frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ . Корень  $x_2$  посторонний, так как  $|x_2| > 1$ .

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

8. Имеем равенство  $\triangle ABC = \triangle BCD$ .  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} = s_2$ . Тогда  $|AB| = |DC| = |AC| = |BD| = \sqrt{2s_2}$ .



$$V_{ABCD} = \frac{r}{3}(s_1 + 2s_2 + s_3).$$

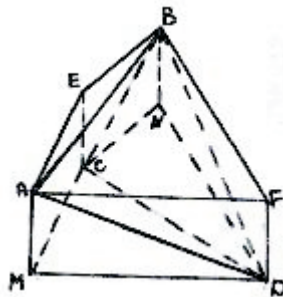
Прямые  $AB$  и  $CD$  – скрещивающиеся. Пусть  $l$  – их общий перпендикуляр. Через прямые  $AB$  и  $CD$  проведем плоскости перпендикулярные к  $l$  и обозначим их соответственно  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Из точек  $A$  и  $B$  опустим перпендикуляры  $AM$  и  $BN$  на плоскость  $\pi_2$ . Аналогично, из точек  $C$  и  $D$  опустим перпендикуляры  $CE$  и  $DF$  на плоскость  $\pi_1$ . В результате получим прямоугольную призму  $AFBEMDNC$ , причем ее высота равна  $x$  – расстоянию между прямыми  $AB$  и  $CD$ . Основания  $AFBE$  и  $MDNC$  равны, и следовательно  $|AB| = |MN|$  и  $|FE| = |CD|$ . Значит,

$$S_{AFBE} = S_{MDNC} = \frac{1}{2}|AB||CD| \sin \alpha = \frac{1}{2}(2s_2) \sin \alpha = s_2 \sin \alpha$$

и

$$V_{AFBEMDNC} = xs_2 \sin \alpha.$$

Соединим точки  $C$  и  $D$  с точками  $A$  и  $B$ . Объем призмы равен сумме объемов 5 пирамид.



Причем

$$V_{ABEC} + V_{ABFD} = \frac{1}{3}xS_{AFBE} = \frac{1}{3}xs_2 \sin \alpha,$$

$$V_{CDMA} + V_{CDNB} = \frac{1}{3}xS_{MDNC} = \frac{1}{3}xs_2 \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$V_{ABCD} = xs_2 \sin \alpha - \frac{2}{3}xs_2 \sin \alpha = \frac{x}{3}s_2 \sin \alpha.$$

Из равенства

$$\frac{r}{3}(s_1 + 2s_2 + s_3) = \frac{x}{3}s_2 \sin \alpha$$

получаем

$$x = \frac{r(s_1 + 2s_2 + s_3)}{s_2 \sin \alpha}.$$

Ответ:  $\frac{r(s_1 + 2s_2 + s_3)}{s_2 \sin \alpha}$ .

*Основной экзамен*

**ВАРИАНТ I**

1. В руде содержится 45% примесей, а выплавленный из нее металл содержит 6% примесей. Сколько получится металла из 47 тонн руды?

2. Решить неравенство

$$\log_2 (x^2 - 6x + 5) \leq 2.$$

3. Окружность касается дуги  $AB$  и радиусов  $OA$  и  $OB$  сектора  $OAB$ . Определить отношение периметра сектора к длине вписанной окружности, если  $\angle AOB = 2\alpha$ .

4. Найти наименьший корень уравнения

$$\sqrt{2} \sin (-4^x + 12) + 1 = 0.$$

5. Решить неравенство

$$\left| x - 5^{1+\sqrt{4-x}} \right| \leq \frac{3}{2}x - 5 \cdot 5^{4-x}.$$

6. Каждая из двух сфер касается оснований цилиндра, его боковой поверхности и плоскости, пересекающей цилиндр. Известно, что объем цилиндра в  $27/4$  раза больше суммы объемов этих шаров. Найти величину угла между секущей плоскостью и основанием цилиндра.

7. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos |x|}{1 - \sin |x|}.$$

8. Решить неравенство

$$\log_{7+5x-2x^2} \lg (x^2 + 1) > \log_{4-x} \lg (x^2 + 1).$$

9. Для каждого значения параметра  $a$  решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x / \sin y = a^2 - 3a - 1 \\ \cos x + 1 / \sin y = 2 - 2a \end{cases}.$$

10. На продолжении ребра  $SC$  треугольной пирамиды  $SABC$  отложена точка  $D$  такая, что  $SC = CD$ . Точка  $F$  - середина ребра  $SB$ , а точка  $E$  принадлежит отрезку  $SA$ , причем  $2SE = EA$ . В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки  $D$ ,  $E$  и  $F$ ?

**Решения.**

1. 27,5

2.  $[3 - \sqrt{13}; 1) \cup (5; 3 + \sqrt{13}]$

3.  $\frac{1+\alpha}{\pi} (1 + 1/\sin \alpha)$

4.  $\log_4 \left( 12 + \frac{\pi}{4} - 4\pi \right)$

5. 4

6.  $\pi/6$

7.  $\pm \left( \frac{\pi}{4} + \pi n \right), n = 0, 1, 2, \dots; 2\pi k, k \in Z$

8.  $\left( -1; \frac{5-\sqrt{73}}{4} \right) \cup \left( \frac{3-\sqrt{15}}{2}; 0 \right) \cup (0; 3) \cup \left( 3; \frac{5+\sqrt{73}}{4} \right) \cup \left( \frac{3+\sqrt{15}}{2}; \frac{7}{2} \right)$

9.  $\left( \pm \arccos(1 - a - \sqrt{2+a}) + 2\pi n; (-1)^n \arcsin \frac{1}{1-a+\sqrt{2+a}} + \pi k \right),$  где  $n, k \in Z, -1 \leq a \leq \frac{(5-\sqrt{17})}{2};$

$\left( \pm \arccos(1 - a + \sqrt{2+a}) + 2\pi n; (-1)^n \arcsin \frac{1}{1-a-\sqrt{2+a}} + \pi k \right),$  где  $n, k \in Z, 2 \leq a \leq \frac{(5+\sqrt{17})}{2};$

 $\emptyset$  при остальных случаях.

10. 4:11.

**ВАРИАНТ II**

1. Свежие фрукты содержат 74% воды, а сухие 16%. Сколько сухих фруктов получится из 21 килограмма свежих фруктов?

2. Решить неравенство

$$\log_2(x^2 - 5x + 2) \leq 3.$$

3. Окружность касается дуги  $MN$  и радиусов  $OM$  и  $ON$  сектора  $OMN$ . Определить отношение площади сектора к площади данного круга, если  $\angle MON = 2\gamma$ .

4. Найти наибольший корень уравнения

$$2 \cos(-(1/3)^x + 9) + \sqrt{3} = 0.$$

5. Решить неравенство

$$|x - 4^{1+\sqrt{3-x}}| \leq \frac{5}{3}x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}}.$$

6. Каждая из 2 сфер касается оснований цилиндра, его боковой поверхности и плоскости, пересекающей цилиндр. Известно, что объем цилиндра в  $\sqrt{3} + \frac{7}{4}$  раза больше суммы объемов этих шаров. Найти величину угла между секущей плоскостью и основанием цилиндра.

7. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 - \sin |x|}{1 + \cos |x|}.$$

8. Решить неравенство

$$\log_{5+3x-2x^2} \lg(x^4 + 1) < \log_{3-x} \lg(x^4 + 1).$$



9. Для каждого значения параметра  $a$  решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x / \cos y = a^2 + a - 3 \\ \sin x + 1 / \cos y = 2a \end{cases} .$$

10. На продолжении ребра  $SC$  треугольной пирамиды  $SABC$  отложена точка  $D$  такая, что  $SC = CD$ . Точка  $E$  – середина ребра  $SA$ , а точка  $F$  принадлежит отрезку  $SB$ , причем  $SF = 2FB$ . В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки  $D, E$  и  $F$ ?

**Решения.**

1. Обозначим вес сухих фруктов через  $x$  и составим следующую таблицу

Состав	Свежие фрукты		Сухие фрукты	
	%	вес	%	вес
Вода	74 %	$21 \cdot \frac{74}{100}$	16 %	$x \cdot \frac{16}{100}$
Твердое вещество	26 %	$21 \cdot \frac{26}{100}$	84 %	$x \cdot \frac{84}{100}$

Так как при сушке фруктов масса твердого вещества не изменяется, то получаем уравнение

$$21 \cdot \frac{26}{100} = x \cdot \frac{84}{100},$$

откуда

$$x = \frac{26}{4} = 6,5.$$

Ответ: 6, 5.

2. ОДЗ для нашего уравнения задается соотношением  $x^2 - 5x + 2 > 0$ .

Найдем корни уравнения  $x^2 - 5x + 2 = 0$ , то есть значения  $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ .

Отметим полученные точки на оси  $x$  и заштрихуем допустимые значения. Имеем



Запишем данное неравенство в удобном для нас виде

$$\log_2(x^2 - 5x + 2) \leq \log_2 2^3.$$

Основания логарифмов больше единицы, поэтому на области допустимых значений переменной  $x$  последнее неравенство эквивалентно квадратичному

$$x^2 - 5x + 2 \leq 8$$

или

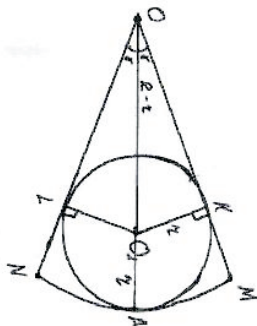
$$x^2 - 5x - 6 \leq 0.$$

По теореме Виета корни уравнения  $x^2 - 5x - 6 = 0$  равны -1 и 6, поэтому последнее неравенство выполняется на отрезке  $[-1; 6]$ . Остается убедиться, что  $-1 < \frac{5-\sqrt{17}}{2}$  и  $\frac{5+\sqrt{17}}{2} < 6$ .

Теперь легко найти решение исходного неравенства  $[-1; \frac{5-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{17}}{2}; 6]$ .

Ответ:  $[-1; \frac{5-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{17}}{2}; 6]$ .

3. Легко проверить, что если две окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются в точке  $A$ , то все три точки  $O_1, O_2, A$  лежат на одной прямой.



Пусть  $A$ -точка касания вписанной окружности и дуги  $MN$ . По замечанию  $O_1$ -центр этой окружности лежит на прямой  $OA$ . Опустим из точки  $O_1$  перпендикуляры  $O_1K$  и  $O_1L$  на прямые  $OM$  и  $ON$ . Так как  $O_1K = O_1L = r$  — радиус вписанной окружности,  $OO_1$  — общая гипотенуза прямоугольных треугольников  $OO_1K$  и  $OO_1L$ . То они равны. Следовательно,  $\angle KOO_1 = \angle O_1OL = \gamma$ .

Обозначим радиус окружности, содержащей дугу  $MN$  посредством  $R$ . Тогда  $OA = R$ ,  $O_1A = r$ ,  $OO_1 = R - r$ . Из прямоугольного треугольника  $KOO_1$  находим, что  $\sin \gamma = \frac{r}{R-r}$  или  $(R - r) \sin \gamma = r$ . Откуда

$$R \sin \gamma = r(1 + \sin \gamma), \quad \frac{R}{r} = 1 + \frac{1}{\sin \gamma}.$$

Заметим, что площадь данного сектора будет составлять часть площади  $\pi R^2$ , пропорциональную коэффициенту  $\frac{2\gamma}{2\pi} = \frac{\gamma}{\pi}$ .

Значит, площадь сектора равна  $\frac{\gamma}{\pi} \pi R^2 = \gamma R^2$ , а площадь вписанного круга равна  $\pi r^2$ . Получаем, что отношение площади сектора к площади вписанного круга равна

$$\frac{\gamma R^2}{\pi r^2} = \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{\gamma}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\sin \gamma}\right)^2.$$

Ответ:  $\frac{\gamma}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\sin \gamma}\right)^2$ .

4. Перепишем уравнение в удобном для нас виде

$$\cos\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^x + 9\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Откуда

$$-\left(\frac{1}{3}\right)^x + 9 = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in Z,$$

наконец,

$$9 \pm \frac{5\pi}{6} - 2\pi k = \frac{1}{3^x}, k \in Z.$$

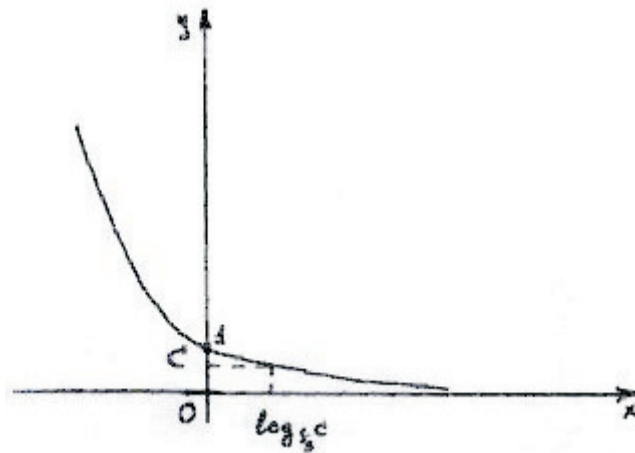
При каждом фиксированном значении  $k$  график функции

$$y = 9 + \frac{5\pi}{6} - 2\pi k$$

проходит выше графика функции

$$y = 9 - \frac{5\pi}{6} - 2\pi k.$$

Нарисуем графики функций  $y = \frac{1}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  и  $y = c, c > 0$ .



Очевидно, что корень уравнения  $\frac{1}{3^x} = c$  будет тем больше, чем ниже будет прямая  $y = c$  при  $c > 0$ . Остается подобрать нужное значение  $k \in Z$ .

Проверим, что при  $k=1$  выполнено неравенство

$$9 - \frac{5\pi}{6} - 2\pi > 0.$$

Убедимся, что  $9 > \frac{17}{6}\pi$  или  $\pi < \frac{9 \times 6}{17} = \frac{54}{17} = 3 \times \frac{3}{17} = 3,17\dots$  Так как  $\pi = 3,14\dots < 3,17\dots$ , то наше предположение подтвердилось.

Прямая  $y = 9 + \frac{5\pi}{6} - 2\pi$  пойдет выше прямой  $y = 9 - \frac{5\pi}{6} - 2\pi$ , а следующая прямая  $y = 9 + \frac{5\pi}{6} - 4\pi$  располагается ниже оси абсцисс, так как  $9 + \frac{5\pi}{6} - 4\pi < 0$ . Действительно,

$$\frac{5\pi}{6} - 4\pi = -\frac{19\pi}{6} < -\frac{18\pi}{6} = -3\pi < -3 \times 3 = -9.$$

Ответ:

$$x_{max} = \log_{\frac{1}{3}}\left(9 - \frac{5\pi}{6} - 2\pi\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(9 - \frac{17\pi}{6}\right).$$

5. Очевидно, что ОДЗ задается неравенством  $x \leq 3$ .

Рассмотрим случай

$$x \geq 4^{1+\sqrt{3-x}} = 4 \times 4^{\sqrt{3-x}} \geq 4.$$

Этот случай невозможен, так как область допустимых значений  $x \leq 3$ .

Остается предположить, что  $x \leq 4^{1+\sqrt{3-x}}$ . Тогда наше неравенство принимает вид

$$4^{1+\sqrt{3-x}} - x \leq \frac{5}{3}x - 4 \times 4^{\sqrt{3-x}}$$

или

$$8 \times 4^{\sqrt{3-x}} \leq \frac{8x}{3}.$$

Откуда

$$3 \times 4^{\sqrt{3-x}} \leq x.$$

Проверим, что  $x = 3$  – решение этого неравенства. Так как при всех  $x < 3$  левая часть строго больше, чем 3, а правая  $\leq 3$ , то других решений нет

Ответ:  $x = 3$ .

6. Обозначения:  $r$  – радиус сферы,  $R$  – радиус оснований цилиндра,  $H$  – его высота. Так как сферы касаются каждого из оснований цилиндра, то  $H = 2r$ . Значит,

$$\sqrt{3} + \frac{7}{4} = \frac{\pi R^2 H}{2 \frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{2\pi R^2 r}{2\pi \frac{4}{3} r^3} = \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Отсюда

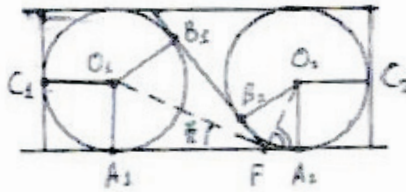
$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{4\sqrt{3} + 7}{3} = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

Следовательно,  $\frac{R}{r} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Пусть нижнее основание цилиндра расположено в горизонтальной плоскости  $\alpha$ ,  $O_s$  – центр сферы и  $A_s$  – проекция  $O_s$  на  $\alpha$  при  $s = 1, 2$ .

Очевидно, что  $O_s A_s \perp \alpha$ ,  $O_1 A_1$  параллельна  $O_2 A_2$  и плоскость  $\beta \perp \alpha$ , где  $\beta$  – плоскость, проведенная через прямые  $O_1 A_1$  и  $O_2 A_2$ .

Рассмотрим сечение плоскостью цилиндра сфер и данной плоскости. Обозначим точками  $B_s$  и  $C_s$  соответственно точки касания сферы с исходной плоскостью и боковой поверхностью цилиндра ( $s = 1, 2$ ). Проведем радиусы  $O_s A_s, O_s B_s, O_s C_s$  при  $s = 1, 2$ . Получим следующую конфигурацию



Пусть  $F$  – точка пересечения прямых  $B_1 B_2$  и  $A_1 A_2$ . Тогда  $\angle B_1 F A_1 = X$  – искомый. Проведем  $O_s F$  – биссектрисы  $\angle B_s F A_s$  при  $s = 1, 2$ . Поэтому  $\angle A_1 F O_1 = \frac{x}{2}$ , а  $\angle O_2 F A_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ , тогда

$$A_1 F + F A_2 = r \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + r \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = r \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \frac{2r}{\sin x}.$$

Диаметр основания цилиндра равен  $2R$ , причем

$$2R = 2r + A_1 A_2 = 2r \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right),$$

то есть  $\frac{R}{r} = 1 + \frac{1}{\sin x}$ .

Отсюда из ранее полученного равенства находим, что  $\sin x = \frac{\sqrt{32}}{2}$ .

Откуда  $x = \frac{\pi}{3}$ .

Ответ:  $x = \frac{\pi}{3}$ .

7. ОДЗ  $x \neq \pi n, n \in Z$ . Функция  $\operatorname{ctg}^2(x)$  – четная, поэтому

$$\operatorname{ctg}^2(x) = \operatorname{ctg}^2|x| = \frac{\cos^2|x|}{\sin^2|x|} = \frac{1 - \sin^2|x|}{1 - \cos^2|x|}.$$

Используя формулы сокращенного умножения, исходное уравнение можем записать следующим образом

$$\frac{1 - \sin|x|}{1 + \cos|x|} \left( \frac{1 + \sin|x|}{1 - \cos|x|} - 1 \right) = 0.$$

Решим первое уравнение  $\sin|x| = 1$ ,

$$|x| = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k = 0, 1, 2, \dots, x = \pm\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k = 0, 1, 2, \dots$$

Преобразуем второй множитель

$$\left( \frac{1 + \sin|x|}{1 - \cos|x|} - 1 \right) = 0, \Leftrightarrow \frac{\sin|x| + \cos|x|}{1 - \cos|x|} = 0.$$

$$\sin|x| + \cos|x| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}|x| = -1 \Leftrightarrow |x| = \frac{3\pi}{4} + \pi s, s = 0, 1, 2, \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\left(\frac{3\pi}{4} + \pi s\right), s = 0, 1, 2, \dots$$

Ответ:

$$x = \pm\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x = \pm\left(\frac{3\pi}{4} + \pi s\right), s = 0, 1, 2, \dots$$

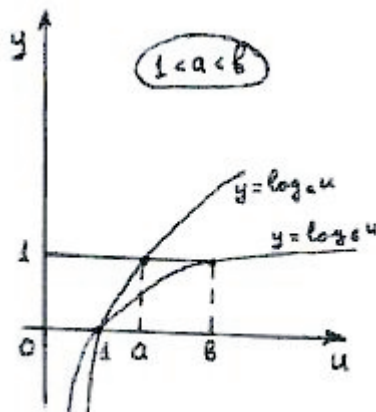
8. Область допустимых значений переменной  $x$  определяется системой

$$\begin{cases} \lg(x^4 + 1) > 0, & 3 - x > 0, & 3 - x \neq 1, \\ 5 + 3x - 2x^2 > 0, & 5 + 3x - 2x^2 \neq 1. \end{cases}$$

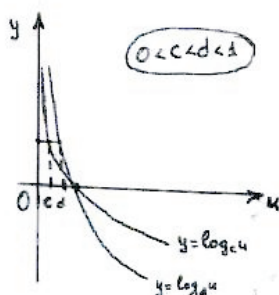
Для нахождения ее полезно построить графики функций  $y_1 = 5 + 3x - 2x^2$ ,  $y_2 = 3 - x$  и  $y_3 = 1$ . Заметим, что  $5 + 3x - 2x^2 = (x + 1)(5 - 2x)$ , с горизонтальной прямой  $y_3 = 1$  парабола пересекается при  $x_3 = \frac{3 - \sqrt{41}}{4}$  и  $x_4 = \frac{3 + \sqrt{41}}{4}$ , а прямая  $y_2 = 3 - x$  – при  $x = 2$ . Остается исключить точку  $x = 0$ , так как в этой точке  $\lg(x^4 + 1) = 0$ . Итак, мы выяснили, что ОДЗ является объединением следующих интервалов  $(-1; x_3) \cup (x_3; 0) \cup (0; 2) \cup (2; x_4) \cup (x_4; \frac{5}{2})$ .

Если  $0 < |x| < \sqrt{3}$ , то значение  $u = \lg(x^4 + 1) \in (0; 1)$ , а при  $|x| \geq \sqrt{3}$  имеем соотношение  $u \geq 1$ .

Для сравнения правой и левой части исходного неравенства изобразим графики  $\log_a u$  и  $\log_b u$  при  $1 < a < b$  на рис.1



и  $\log_c u$  и  $\log_d u$  при  $0 < c < d < 1$  на рис.2.



Как мы уже убедились, значение  $u = \lg(x^2 + 1)$  при  $x \in (-1; 0) \cup (0; \sqrt{3})$  содержится в интервале  $(0; 1)$ , поэтому на  $(-1; x_3)$  левая часть исследуемого неравенства положительна, а правая - отрицательна. Следовательно, на  $(-1; x_3)$  нет решений. На следующем интервале  $(x_3; x_1)$  выполнены неравенства  $1 < y_1 < y_2$  и  $0 < u < 1$ , то, согласно рис.2, все значения  $x$  из  $x_3; x_1$  являются решениями нашего неравенства. На объединений  $(x_1; 0) \cup (0; \sqrt{3})$  имеем отношения  $1 < y_2 < y_1$  и  $0 < u < 1$ , поэтому, согласно рис.2, решений нет. При  $x = \sqrt{3}$  и  $x = 1 + \sqrt{2}$  правая и левая части равны, значит, эти числа не могут быть решениями данного нам неравенства. На интервале  $(\sqrt{3}; 2)$  справедливы соотношения  $1 < y_2 < y_1$  и  $u > 1$ , следовательно, в соответствии с рис.1, весь интервал включается в ответ. Далее, на  $(2; x_4)$  левая часть исходного неравенства положительна, а правая - отрицательна, поэтому решений нет. На  $(x_4; x_2)$  имеем соотношения  $0 < y_2 < y_1$  и  $u > 1$ . Из рис.2 получаем, что весь этот интервал включается в ответ. Наконец, на интервале  $(x_2; \frac{5}{2})$  выполняются неравенства  $0 < y_1 < y_2$  и  $u > 1$ . В соответствии с рис.2 решений нет.

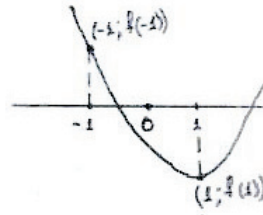
Ответ:  $\left(\frac{3-\sqrt{41}}{4}; 1 - \sqrt{2}\right) \cup (\sqrt{3}; 2) \cup \left(\frac{3+\sqrt{41}}{4}; 1 + \sqrt{2}\right)$ .

9. Так как  $|\sin x| \leq 1$ , а  $\frac{1}{|\cos y|} \geq 1$ , то, используя теорему Виета, можем утверждать, что решения системы существуют тогда и только тогда, когда один из корней уравнения

$$z^2 - 2az + a^2 + a - 3 = 0 \quad (1)$$

лежит на отрезке  $[-1; 1]$ , а модуль другого корня больше 1.

Рассмотрим первый случай: пусть меньший корень находится на отрезке  $[-1; 1]$ , а больший корень больше 1. График квадратного трехчлена  $f(z) = z^2 - 2az + a^2 + a - 3$ , соответствующий этому случаю, будет иметь следующий вид:

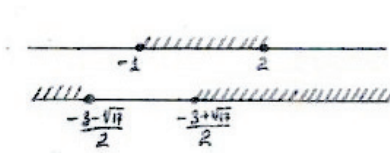


Заметим, что

первый случай возможен только тогда, когда имеет решение система

$$\begin{cases} f(1) \leq 0, \\ f(-1) \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2a + a^2 + a - 3 \leq 0, \\ 1 + 2a + a^2 + a - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 \leq 2, \\ a^2 + 3a - 2 \geq 0. \end{cases}$$

Решениями уравнения  $a^2 - a - 2 = 0$  являются числа  $-1$  и  $2$ ;  $a = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$  - корни уравнения  $a^2 + 3a - 2 = 0$ .



Отсюда следует, что решения первого неравенства образуют отрезок  $[-1; 2]$  и  $(-\infty; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; +\infty)$  - все решения второго неравенства. Так как имеет место цепочка отношений  $\frac{-3-\sqrt{17}}{2} < -1 < \frac{-3+\sqrt{17}}{2} < 2$ , то каждая точка отрезка  $[\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; 2]$  является решением последней системы и других решений нет.

Найдем корни уравнения (1)

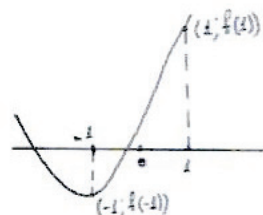
$$z_{1,2} = a \pm \sqrt{3-a} \text{ при } a \leq 3.$$

Значит, если  $a \in [\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; 2]$ , то корень  $z_1 = a - \sqrt{3-a} \in [-1; 1]$ ,  $z_2 = a + \sqrt{3-a} \geq 1$ .

Получаем систему (при  $a \in [\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; 2]$ )

$$\begin{cases} \sin x = a - \sqrt{3-a}, \\ \frac{1}{\cos x} = a + \sqrt{3-a}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a - \sqrt{3-a}, \\ \cos x = \frac{1}{a + \sqrt{3-a}}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin(a - \sqrt{3-a}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ y = \pm \arccos \frac{1}{a + \sqrt{3-a}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Во втором случае меньший корень меньше  $-1$ , а больший корень лежит на отрезке  $[-1; 1]$ .



В этом случае необходимо рассмотреть систему

$$\begin{cases} f(1) \geq 0, \\ f(-1) \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 \geq 0, \\ a^2 + 3a - 2 \leq 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является каждое значение из отрезка  $\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{2}; -1\right]$ .

Следовательно, при  $a \in \left[\frac{-3-\sqrt{17}}{2}; -1\right]$  получаем систему, эквивалентную исходной системе.

$$\begin{cases} \sin x = a + \sqrt{3-a}, \\ \frac{1}{\cos x} = a - \sqrt{3-a}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a + \sqrt{3-a}, \\ \cos x = \frac{1}{a-\sqrt{3-a}}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

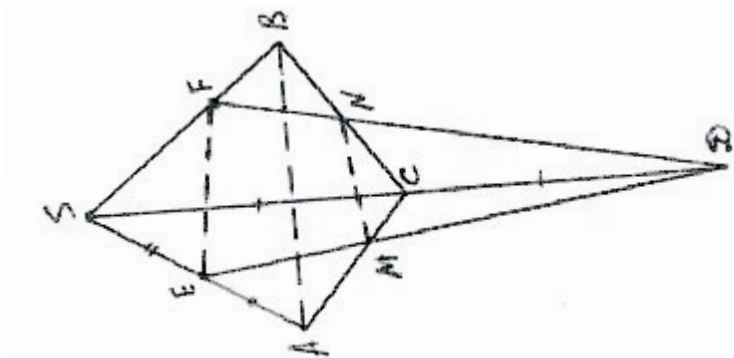
$$\begin{cases} x = (-1)^n \arcsin(a + \sqrt{3-a}) + \pi n, n \in Z, \\ y = \pm \arccos \frac{1}{a-\sqrt{3-a}} + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Ответ:  $\left((-1)^n \arcsin(a - \sqrt{3-a}) + \pi n; \pm \arccos \frac{1}{a+\sqrt{3-a}} + 2\pi k\right)$  при  $a \in \left[\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; 2\right]$   
 $n, k \in Z;$

$\left((-1)^n \arcsin(a + \sqrt{3-a}) + \pi n; \pm \arccos \frac{1}{a-\sqrt{3-a}} + 2\pi k\right)$  при  $a \in \left[\frac{-3-\sqrt{17}}{2}; -1\right]$   $n, k \in Z;$

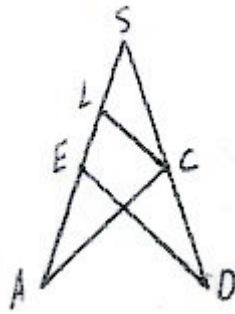
при остальных значениях параметра  $a$  система не имеет решений.

10. Соединим точки  $E$  и  $D$  отрезком  $ED$ , который пересекает отрезок  $AC$  в точке  $M$ . Пусть  $N$  - точка пересечения отрезков  $FD$  и  $CB$ . Соединяем точки  $E$  и  $F$ , а также  $M$  и  $N$ . Сечение  $EFNM$  разбиваем исходную пирамиду на два многогранника  $SCMEFN$  и  $ABFNME$ , Отношение объемов которых нас и интересует.

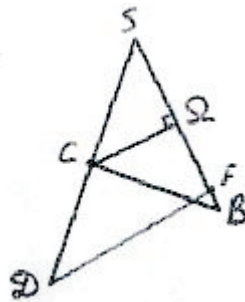


Сначала найдем коэффициент пропорциональности длин отрезков  $AM$  и  $MC$ . В плоскости  $ASD$  через точку  $C$  проведем прямую  $L \parallel DF$ , где  $L \in ES$ . Так как  $SC = CD$  по условию, то, учитывая, что  $CL \parallel ED$  по теореме Фалеса получаем равенство  $EL = LS$ . По условию  $AE = ES$ , значит,  $AE = 2EL$ . Снова используем теорему Фалеса и будем иметь равенство  $AM = 2NC$ .



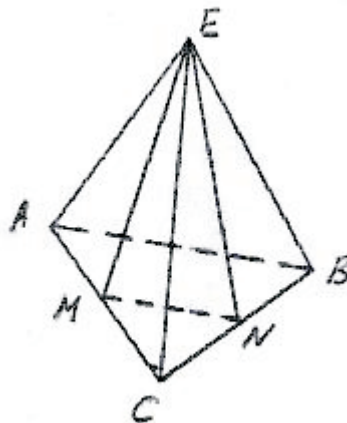


В плоскости  $DSB$  проведем прямую  $CQ \parallel DF$ ,  $Q \in SF$ . Раз  $SC = CD$  по условию, то  $CQ$  — средняя линия  $\triangle SDF$ . Поэтому  $SQ = QF$  и, учитывая условие  $SF = 2FB$ , получим равенство  $QF = FB$ . По теореме Фалеса найдем, что  $CN = NB$ .



Далее будем использовать следующий результат: если на ребрах треугольной пирамиды  $SQRT$  взять точки  $Q_1 \in PQ$ ,  $R_1 \in PR$  и  $T_1 \in PT$ , причем  $PQ_1 = kPQ$ ,  $PR_1 = lPR$ , и  $PT_1 = qPT$ , где числа  $k, l, q \in (0; 1)$ , то объем меньшей пирамиды будет равен произведению  $klqV_{PQRT}$ . Действительно, пусть  $PRQ$  — основание пирамиды  $TPRQ$ . Заметим, что  $V_{PQRT} = \frac{1}{3}TO \cdot \frac{1}{2}PR \cdot PQ \cdot \sin \angle RPQ$ , а  $V_{PQ_1R_1T_1} = \frac{1}{2}T_1O_1 \cdot \frac{1}{2}PR_1 \cdot PQ_1 \cdot \sin \angle RPQ$ , где  $TO \parallel T_1O_1$  и  $TO$  — высота большей пирамиды.  $\triangle PT_1O_1$  подобен треугольнику  $PTO$  с коэффициентом подобия  $q$ , следовательно  $T_1O_1 = qTO$ . Для получения требуемого равенства остается подставить в формулу для объема меньшей пирамиды нужные выражения, содержащие множители, определяющие объем большей пирамиды.

Рассмотрим пирамиду  $EABC$ . Так как  $E$  — середина ребра  $AC$ , то

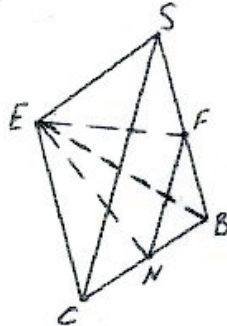


$V_{EABC} = \frac{1}{2}V_{SABC} \equiv \frac{V}{2}$ . По доказанному

$$V_{EMNC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}V_{EABC} = \frac{1}{12}V$$

$$V_{EAMNB} = V_{EABC} - \frac{1}{12}V = \frac{5}{12}V$$

Остается рассмотреть пирамиду SBCE.



Очевидно, что

$$V_{SBCE} = \frac{V}{2}. \text{ По утверждению}$$

$$V_{EFBN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}V_{SBCE} = \frac{V}{12}.$$

$$V_{ESFNC} = \frac{V}{2} - \frac{V}{12} = \frac{5}{12}V.$$

$$\text{Итак, } V_{SCMEFN} = V_{ESFNC} + V_{EMNC} = \frac{5}{12}V + \frac{1}{12}V = \frac{1}{2}V.$$

Объем второго многогранника тоже равен  $\frac{1}{2}V$ .

Ответ: 1:1.

## ФИЗИКА

### Олимпиада «Абитуриент — 2007» (апрель)

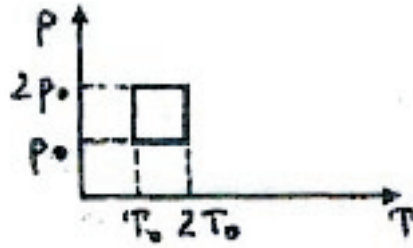
#### ВАРИАНТ I

1. Силы в механике. Сложение сил, действующих на материальную точку. Инертность тел. Масса. Второй закон Ньютона. Единицы измерения силы и массы.

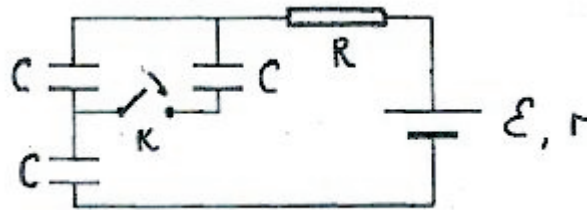
На тело массой  $m = 2,5$  кг действуют три силы, две из которых - с величинами  $F_1 = 8$  Н и  $F_2 = 5$  Н - направлены в противоположные стороны вдоль одной прямой, а третья - величиной  $F_3 = 4$  Н - направлена перпендикулярно этой прямой. Чему равно ускорение центра масс тела?

2. Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул и температура. Постоянная Больцмана.

Найти отношение максимального и минимального значений концентрации идеального газа в процессе, диаграмма которого показана на рисунке.



3. Если нить лампочки разместить на главной оптической оси собирающей тонкой линзы перпендикулярно этой оси, то линза дает действительное изображение нити с увеличением  $k$ . Каким будет увеличение изображения нити, если ее разместить вдоль главной оптической оси той же линзы в той же точке? Считать, что нить тонкая и практически прямолинейная, а ее длина много меньше фокусного расстояния линзы.
4. В схеме, изображенной на рисунке, ключ  $K$  достаточно долгое время был разомкнут. Какое количество тепла выделится в схеме после замыкания ключа? Емкости всех конденсаторов одинаковы и равны  $C = 6 \text{ мкФ}$ , ЭДС источника  $\varepsilon = 20 \text{ В}$ .



## ВАРИАНТ II

1. Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тела в поле тяжести Земли. Потенциальная энергия упруго деформированного тела. Закон сохранения полной механической энергии.

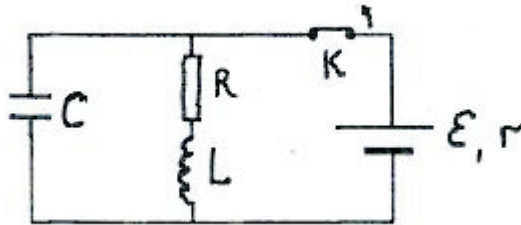
По гладкому вертикальному стержню, в нижней части которого закреплена (своим нижним концом) пружина жесткостью  $k = 15 \text{ Н/м}$ , может скользить груз массой  $m = 50 \text{ г}$ . Груз отпускают без начальной скорости из точки, расположенной на высоте  $h = 4,9 \text{ см}$  над верхним концом пружины. Найти максимальную величину деформации пружины. Ускорение свободного падения считать равным  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

2. Парообразование. Испарение, кипение. Насыщенный пар. Зависимость температуры кипения от давления.

Под легким поршнем в теплоизолированном вертикальном цилиндрическом сосуде

с гладкими стенками находится  $m = 1$  кг воды с температурой  $t_0 = 90^\circ \text{C}$ . Воде сообщили количество теплоты, равное  $Q = 104$  кДж. Найти массу образовавшегося водяного пара. Внешнее давление равно нормальному атмосферному, удельная теплоемкость воды  $c = 4,2$  кДж/кгК, удельная теплота парообразования  $r = 2480$  кДж/кг.

- Тонкая прямая палочка размещена перпендикулярно главной оптической оси тонкой линзы так, что один из ее концов находится на этой оси. Линза дает действительное изображение палочки с увеличением  $k$ . Расстояние между палочкой и изображением, отсчитываемое вдоль оси линзы, равно  $d$ . Найти фокусное расстояние линзы.
- В схеме, изображенной на рисунке, ключ  $K$  достаточно долгое время был замкнут. Какое количество тепла выделится в сопротивлении  $R$  после размыкания ключа?



Излучением пренебречь.

### Основной экзамен

#### ВАРИАНТ III

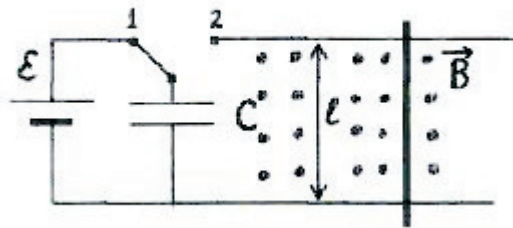
- Импульс материальной точки. Импульс тела. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.

Шайба, скользящая по гладкому горизонтальному льду, столкнулась с другой такой же покоящейся шайбой. После упругого соударения шайбы стали двигаться с одинаковыми по величине скоростями. Чему равен угол разлета шайб?

- Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. Масса и размеры молекул. Характер движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах.

Во сколько раз отличаются количества молекул в  $1\text{см}^3$  воды и в  $1\text{см}^3$  насыщенного водяного пара при температуре  $t = 20^\circ \text{C}$ ? Плотность воды равна  $\rho_{\text{в}} = 1\text{г}/\text{см}^3$ , молярная масса  $18$  г/моль, давление насыщенного водяного пара при  $t = 20^\circ \text{C}$  и  $\rho_{\text{нас}} = 2,3$  кПа.

3. Тонкий стержень размещен перпендикулярно главной оптической оси тонкой линзы, причем один из его концов находится на этой оси. Расстояние между стержнем и его мнимым уменьшенным изображением в  $n = 2$  раза больше величины фокусного расстояния линзы. Во сколько раз линейный размер изображения отличается от линейного размера стержня?
4. Переключатель с массой  $m$  и сопротивлением  $R$  лежит на двух длинных гладких параллельных шинах, проходящих в горизонтальной плоскости на расстоянии  $l$  друг от друга (см. рис.). Ключ  $K$  длительное время находился в положении 1. В пространстве между шинами создано магнитное поле с индукцией  $B$ , силовые линии которого вертикальны. До какой максимальной скорости может разогнаться переключатель после перевода ключа в положение 2?



Сопротивление шин считать пренебрежимо малым.

#### ВАРИАНТ IV

1. Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Гидростатическое давление. Сообщающиеся сосуды.

В одно из вертикальных колен U-образной трубки с водой аккуратно наливают масло до тех пор, когда длина столбика масла в этом колене достигает  $l = 5$  см. Длина этого колена больше 5 см. Найти разность высот уровня жидкости в коленах трубки, если известно, что плотность воды  $\rho_v = 1 \text{ г/см}^3$ , а плотность масла  $\rho_M = 0,9 \text{ г/см}^3$ .

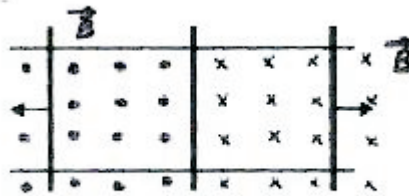
2. Внутренняя энергия идеального газа. Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Первый закон термодинамики. Адиабатический процесс.

Под подвижным поршнем в теплоизолированном вертикальном цилиндрическом сосуде с гладкими стенками находится  $\nu = 0,5$  моля гелия. Какую минимальную работу надо совершить над гелием, чтобы его температура возросла на  $10^0 \text{ C}$ ?

3. Тонкая прямая палочка размещена перпендикулярно главной оптической оси тонкой линзы с фокусным расстоянием  $F$  так, что один из ее концов находится на этой оси. Линза дает мнимое изображение палочки. Если палочку отодвинуть от линзы

на половину фокусного расстояния, то изображение станет действительным, но его линейный размер останется прежним. На каком расстоянии от линзы была размещена палочка?

4. Две параллельные шины расположены в горизонтальной плоскости на расстоянии  $l$  друг от друга. В пространстве между ними создано магнитное поле с индукцией  $B$ , силовые линии которого вертикальны, причем вектор индукции направлен вверх в полупространстве слева от средней перемычки, и вниз - справа от нее. На шинах лежат (перпендикулярно шинам) три одинаковые перемычки с сопротивлением  $R$ , причем расстояние между ними также равно  $l$  (см. рис.).



Крайние перемычки одновременно и симметрично раздвигают, увеличивая расстояние между перемычками вдвое. Какой заряд протечет при этом через центральную перемычку? Сопротивлением шин пренебречь.

### Решения.

#### ВАРИАНТ I

##### Решение

1. Ясно, что модуль вектора суммарной силы

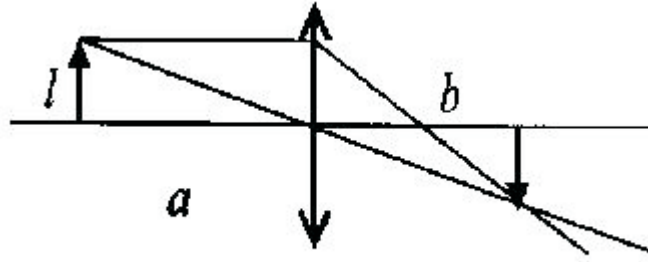
$$|\vec{F}| = \sqrt{(F_1 - F_2)^2 + F_3^2} = \sqrt{(8H - 5H)^2 + (4H)^2} = 5H.$$

Поэтому ускорение центра масс  $a = |\vec{F}|/m = 2$  м/с.

2. В соответствии с основным уравнением молекулярно-кинетической теории для идеального газа  $n = p/kT$  поэтому на диаграмме  $p - T$  концентрация пропорциональна тангенсу угла наклона прямой, проведенной из начала координат. Значит,

$$\frac{n_{\max}}{n_{\min}} = \frac{n_2}{n_4} = \frac{2p_0}{T_0} \cdot \frac{2T_0}{p_0} = 4.$$

3. Собирающая линза дает действительное изображение, если расстояние от объекта до линзы  $a > F$ . Из построения для такого случая видно, что увеличение при поперечном расположении нити:



$$k = -\frac{l'}{l} = -\frac{b}{a}.$$

С учетом формулы линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{a-F} \Rightarrow k = -\frac{F}{a-F}.$$

При продольном расположении можно получить выражение для увеличения маленького предмета непосредственно из формулы линзы:

$$\tilde{a} = a - l \Rightarrow l' = \tilde{b} - b = \frac{(a-l)F}{a-l-F} - \frac{aF}{a-F} = \frac{F^2}{(a-l-F)(a-F)} l \approx \left(\frac{F}{a-F}\right)^2 l.$$

Следовательно,

$$k_{np} = \left(\frac{F}{a-F}\right)^2 = k^2.$$

Следует отметить, что этот ответ корректен только в том случае, если  $l \ll a - F$  так как при приближении края нити к передней фокальной плоскости линзы увеличение начинает сильно зависеть от размеров нити. Более того, если нить пересекает эту плоскость  $l > a - F$ , то четкого изображения нити вообще нет.

4. Пока ключ был разомкнут, источник ЭДС зарядил батарею из двух последовательно соединенных одинаковых конденсаторов. Так как в этом случае

$$\frac{1}{C_{\text{общ}}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \Rightarrow C_{\text{общ}} = \frac{C}{2},$$

то заряд батареи конденсаторов (равный для последовательного соединения заряду каждого из конденсаторов)  $q = C \varepsilon / 2$ . Энергия конденсаторов

$$E_C = \frac{q^2}{2C_{\text{общ}}} = \frac{1}{4} C \varepsilon^2.$$

После замыкания ключа в состав батареи конденсаторов включается еще один конденсатор, и теперь

$$\frac{1}{C'_{\text{общ}}} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{C} \Rightarrow C'_{\text{общ}} = \frac{2C}{3}.$$

Следовательно, источник ЭДС будет дозаряжать батарею конденсаторов до заряда  $q' = 2 C \varepsilon / 3$ , совершив в итоге работу

$$A = \varepsilon (q' - q) = \frac{1}{6} C \varepsilon^2.$$

Эта работа идет на увеличение энергии конденсаторов и на компенсацию тепловых потерь. Поскольку

$$E'_C = \frac{(q')^2}{2 C'_{\text{общ}}} = \frac{1}{3} C \varepsilon^2.$$

то в схеме выделяется тепло

$$Q = A + E_C - E'_C = C \varepsilon^2 \cdot \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12} C \varepsilon^2 = \frac{6 \cdot 10^{-6} \phi \cdot (20)^2 B^2}{12} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

## ВАРИАНТ II

### Решение

1. При соскальзывании груза его потенциальная энергия в поле тяжести переходит в кинетическую энергию, а затем (вместе с кинетической) - в энергию упругой деформации пружины. Деформация пружины (обозначим ее  $x$ ) максимальна в момент остановки груза, когда вся убыль потенциальной энергии груза в поле тяжести перешла в энергию пружины:

$$m g (h + x) = \frac{k x^2}{2} \Rightarrow x^2 - 2 \frac{m g}{k} x - \frac{2 m g h}{k} = 0.$$

Ясно, что правильным ответом является положительный корень этого квадратного уравнения, то есть

$$x = \frac{m g}{k} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2 k h}{m g}} \right] = \frac{0,49}{15} \text{ м} \cdot \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 15 \cdot 0,049}{0,49}} \right] = 9,8 \text{ см.}$$

2. При сообщении воде тепла она будет нагреваться до температуры, не превышающей температуры кипения. Поскольку давление на поверхность воды в условиях задачи примерно равно нормальному атмосферному, то  $t_{\text{кип}} = 100^\circ \text{ С}$ . На нагрев воды до этой температуры будет истрачено количество теплоты

$$Q_1 = c m (t_{\text{кип}} - t_0) = 42 \text{ кДж}.$$

Далее тепло будет расходоваться на парообразование (ясно, что сообщенного количества тепла не хватит на испарение всей воды). Масса образовавшегося пара

$$m_{\text{пара}} = \frac{Q - Q_1}{r} = \frac{104 - 42}{2480} \text{ кг} = 25 \text{ г}.$$

3. Поскольку по условию изображение действительное, то линза - собирающая, и расстояние от объекта до линзы  $a > F$ . Если обозначить расстояние от изображения до линзы



символом  $b$ , то можно записать соотношения (см. построение к задаче 3 в варианте I):

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = d \\ |k| = \frac{l'}{l} = \frac{b}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{d}{1+|k|} \\ b = \frac{|k|d}{1+|k|} \end{array} \right.$$

С учетом формулы линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1+|k|}{d} + \frac{1+|k|}{|k|d} = \frac{(1+|k|)^2}{|k|d}.$$

Таким образом,

$$F = \frac{|k|d}{(1+|k|)^2}.$$

4. До размыкания ключа в схеме установился стационарный режим: через резистор и катушку индуктивности протекал постоянный ток

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}$$

(омическим сопротивлением катушки пренебрегаем), а конденсатор был заряжен до заряда

$$q = C U_C = C I R = \frac{C R \varepsilon}{R+r}.$$

После размыкания ключа в контуре возникнут свободные затухающие колебания. Если параметры контура таковы, что потерями энергии на излучение электромагнитных волн можно пренебречь (что в соответствии с условием имеет место в данной задаче), то основным каналом энергетических потерь является выделение тепла в резисторе  $R$ . Поэтому в данном резисторе в виде тепла выделится практически вся электромагнитная энергия, запасенная в контуре к моменту размыкания ключа. Эта энергия складывается из энергии электростатического поля в конденсаторе и энергии магнитного поля в катушке индуктивности. В результате получаем:

$$Q_R \approx \frac{q^2}{2C} + \frac{L I^2}{2} = \frac{\varepsilon^2}{2(R+r)^2} \cdot [C R^2 + L].$$

### ВАРИАНТ III

#### Решение

1. Поскольку после соударения обе шайбы стали двигаться с ненулевыми скоростями, то соударение не было центральным (при упругом центральном соударении тел одинаковой массы налетающее тело останавливается). Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \vec{v}_0 = m \vec{v}_1 + m \vec{v}_2 \\ \frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m v_2^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \end{array} \right.$$

Применяя к треугольнику векторов скоростей теорему косинусов, получаем:

$$\cos \alpha = \frac{v_0^2 - v_1^2 - v_2^2}{2 v_1 v_2} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что этот ответ не зависит собственно от величин скоростей шайб после соударения - важно лишь, что  $v_1 \neq 0$ .

2. Отношение количества молекул воды и пара в  $1 \text{ см}^3$  очевидно равно отношению концентраций молекул в этих веществах. Концентрацию молекул воды можно оценить, используя данные о ее плотности:

$$n_{\text{в}} = \frac{\rho_{\text{в}}}{m} = \frac{\rho_{\text{в}} \cdot N_A}{\mu}.$$

(здесь  $N_A \approx 6,0210^{23}$  - число Авогадро). Концентрацию молекул пара можно найти, используя основное уравнение молекулярно-кинетической теории:

$$n_n = \frac{p_{\text{нас}}(T)}{kT}.$$

Поэтому

$$\frac{n_{\text{в}}}{n_n} = \frac{\rho_{\text{в}} N_A kT}{\mu p_{\text{нас}}(T)} = \frac{\rho_{\text{в}} RT}{\mu p_{\text{нас}}(T)} \approx \frac{10^3 \cdot 8,31 \cdot 293}{18 \cdot 10^{-3} \cdot 2,3 \cdot 10^3} \approx 5,9 \cdot 10^4.$$

3. Из того, что изображение стержня мнимое и уменьшенное, становится ясно, что рассматриваемая в задаче линза является рассеивающей. Поэтому расстояния от стержня и его изображения до линзы связаны соотношением

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} = -\frac{1}{|F|} \Rightarrow b = -\frac{a|F|}{a + |F|}.$$

Расстояние между стержнем и изображением

$$a - |b| = \frac{a^2}{a + |F|} = n \cdot F \Rightarrow a^2 - n|F|a - n|F|^2 = 0.$$

Решая это уравнение (с учетом того, что величина  $a$  заведомо положительна), получим:

$$a = \frac{|F|}{2} \left[ n + \sqrt{n^2 + 4n} \right].$$

Используя полученную в решении задачи 3 из варианта I формулу для увеличения тонкой линзы, получим

$$k = \frac{F}{F - a} = \frac{|F|}{|F| + a} = \frac{2}{2 + n + \sqrt{n^2 + 4n}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}.$$

Ответ: размер изображения меньше размера предмета в  $2 + \sqrt{3} \approx 3,73$  раза.

4. До перевода ключа в положение 2 конденсатор зарядится до заряда  $q = C \cdot \varepsilon$ . После переключения конденсатор разряжается через шины и перемычку. Изменение заряда конденсатора за малое время  $\Delta t$  определяется током разрядки:

$$\Delta q = -I \Delta t.$$

Появление тока вызовет движение перемычки под действием силы Ампера. Приращение скорости оказывается связано с убывлюю заряда:

$$\Delta v = \frac{F_A}{m} \Delta t = \frac{I B l}{m} \Delta t = -\frac{B l}{m} \Delta q.$$

Суммируя все малые изменения, получаем:

$$v_{\max} - 0 = -\frac{Bl}{m} (0 - C\varepsilon) \Rightarrow v_{\max} = \frac{BlC\varepsilon}{m}.$$

В реальной системе конечная скорость несколько меньше из-за потерь на излучение.

## ВАРИАНТ IV

### Решение

1. Обозначим высоты столбов жидкости в коленях с маслом и без масла  $h_1$  и  $h_2$  соответственно. В равновесном состоянии

$$\rho_B (h_1 - l) + \rho_M l = \rho_B h_2 \Rightarrow \Delta h \equiv h_1 - h_2 = l \left(1 - \frac{\rho_M}{\rho_B}\right) > 0.$$

Таким образом, уровень жидкости в колене с маслом выше на

$$\Delta h = 5 \text{ см} \cdot (1 - 0,9) = 0,5 \text{ см}.$$

2. Если в процессе сжатия гелия теплоизоляция не нарушается ( $Q = 0$ ), то вся совершаемая работа идет на увеличение внутренней энергии гелия, который является одноатомным газом. Поэтому

$$A_{\text{внеш}} = \Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \cdot 0,5 \text{ моля} \cdot 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot K \cdot 100K \approx 623 \text{ Дж}.$$

3. Учитывая, что изображение палочки может быть и мнимым, и действительным, приходим к выводу, что используемая линза является собирающей. Пусть  $a_1$  и  $a_2$  - расстояния от палочки до линзы в первом и втором положении. Поскольку линейные размеры изображений в обоих случаях одинаковы, то абсолютное значение увеличения одинаково, а знак увеличения противоположен. Используя формулу для поперечного увеличения, получим:

$$\frac{F}{F - a_1} = \frac{F}{a_2 - F} \Rightarrow a_1 + a_2 = 2F.$$

Кроме того, по условию задачи

$$a_2 = a_1 + \frac{F}{2}.$$

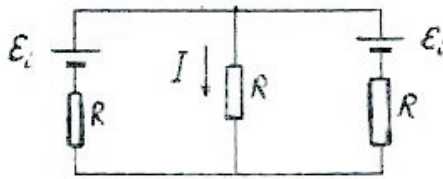
Подставляя второе соотношение в первое, получим ответ:

$$a_1 = \frac{3}{4} F.$$

4. При перемещении крайних перемычек в них возникают равные по величине ЭДС индукции, связанные с изменением магнитного потока через каждый из образованных контуров:

$$\varepsilon_i = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|.$$

Роль сторонней силы выполняет сила Лоренца, действующая на носители зарядов. Эквивалентная схема цепи, образованной шинами и перемычками



позволяет найти связь мгновенного значения силы тока в средней перемычке с величиной ЭДС: поскольку ветви, отвечающие крайним перемычкам, можно объединить в одну, содержащую ЭДС той же величины и сопротивление  $R/2$ , то

$$I = \frac{\varepsilon_i}{3R/2} = \frac{2\varepsilon_i}{3R}.$$

Тогда заряд, протекающий в ней за время  $\Delta t$ :

$$\Delta q = I \Delta t = \frac{2\varepsilon_i}{3R} \Delta t = \frac{2}{3R} \Delta \Phi,$$

( $\Delta \Phi$  - изменение магнитного потока через площадь между средней и крайней перемычками) и поэтому за все время перемещения крайних перемычек через среднюю протечет заряд

$$q = \frac{2}{3R} (\Phi_{\text{кон}} - \Phi_{\text{нач}}) = \frac{2}{3R} (B \cdot 2l^2 - B \cdot l^2) = \frac{2Bl^2}{3R}.$$

## ОБЩЕСТВОЗНАНИЕ

1. Укажите единственное правильное утверждение из приведенных ниже.
  - (1) Держатель любой акции имеет право участвовать в управлении акционерным обществом.
  - (2) Держатель любой акции при ликвидации акционерного общества имеет право на гарантированный возврат денежной суммы, затраченной на приобретение акций
  - (3) Держатель любой акции имеет гарантированный уровень дохода
  - (4) Держатель любой акции может свободно распоряжаться принадлежащими ему акциями
  - (5) Держатель любой акции является собственником акционерного общества.
  
2. Исторически первыми странами, в которых сформировались рыночные (капиталистические) отношения были
  - (1) Япония, Россия, Китай
  - (2) США, Канада, Австралия
  - (3) Нидерланды, Великобритания, Франция
  - (4) Италия, Испания, Португалия
  - (5) Германия, Австро-Венгрия, Швейцария
  
3. Первая антифеодальная революция Нового Времени произошла в
  - (1) Франции
  - (2) Германии
  - (3) Англии
  - (4) России
  
4. Найдите ОШИБКУ в перечне народов, населявших некогда территорию Европы, но ушедших в историческое небытие:
  - (1) галлы
  - (2) пруссы
  - (3) этруски
  - (4) финикийцы
  - (5) бретонцы
  
5. Назовите автора следующего высказывания: В каждом государстве "есть три рода власти: власть законодательная, власть исполнительная, ведающая вопросами международного права, и власть исполнительная, ведающая вопросами права гражданского... Последнюю власть можно назвать судебной, а вторую - просто исполнительной властью государства".
  - (1) Ш. Монтескье
  - (2) Цицерон
  - (3) Дж. Локк
  - (4) Аристотель
  - (5) Т. Гоббс

6. В работах какого философа Античности отстаивалась идея о том, что возникновение общества и государства связано с потребностями людей, оно основано на "договоре" между людьми?
- (1) Эпикур
  - (2) Демокрит
  - (3) Цицерон
  - (4) Протагор
  - (5) Спиноза
7. В мае затраты на производство состояли из расходов на сырье и на оплату труда в пропорции 7:4. В июне при прежней технологии расходы на одну тонну сырья выросли на 43%, а оплата одного часа рабочего времени уменьшилась на 12%. Как изменились затраты на изготовление одной единицы продукции? Укажите наиболее точный ответ.
- (1) выросли на 16,5%
  - (2) ответ зависит от объема производства
  - (3) снизились на 5%
  - (4) выросли на 23%
  - (5) выросли на 31%
8. В стране А государство в целях охраны окружающей среды ограничивает лов рыбы в прибрежных водах, а ученые публикуют результаты исследований, подтверждающих положительное влияние регулярного потребления рыбы на продолжительность жизни. Тогда на совершенно конкурентном рынке рыбной продукции при прочих равных условиях (выберите полностью верное утверждение)
- (1) равновесная цена может как вырасти, так и упасть
  - (2) равновесное количество потребляемой рыбы вырастет, а цена упадет
  - (3) равновесное количество потребляемой рыбы может как вырасти, так и упасть
  - (4) равновесная цена не изменится
  - (5) равновесная цена обязательно упадет
9. Правительство, защищая интересы производителей, установило на совершенно конкурентном рынке минимальную цену товара выше равновесной. Тогда при прочих равных условиях и стандартном виде кривых спроса и предложения в новом состоянии по сравнению с равновесным
- (1) объем продаж увеличится
  - (2) объем покупок увеличится
  - (3) объем продаж не изменится
  - (4) объем покупок может как уменьшиться, так и увеличиться
  - (5) объем продаж уменьшится
10. Укажите ОШИБКУ в характеристиках парламентской республики.
- (1) М. Фридман
  - (2) Ф. Энгельс
  - (3) Ф. Хайек
  - (4) Дж.М. Кейнс
  - (5) Дж. Гэлбрейт

11. Договор, в соответствии с которым одна сторона обязуется выполнить по заданию другой стороны определенную работу и сдать ее результат, а другая сторона обязуется принять и оплатить результат работы - это договор
- (1) ссуды
  - (2) подряда
  - (3) аренды
  - (4) купли-продажи
  - (5) мены
12. Укажите ОШИБКУ в характеристиках парламентской республики.
- (1) Правительство несет ответственность за свою деятельность перед парламентом.
  - (2) Правительство формирует и возглавляет премьер-министр.
  - (3) Правительство формируется на парламентской основе из числа представителей политических партий, располагающих большинством голосов в парламенте.
  - (4) Президент избирается всенародным голосованием.
  - (5) Парламент может оказать недоверие правительству.
13. Степень влияния личности в социальной группе или обществе, а также степень признания группой людей или обществом личных и деловых качеств кого-либо из членов - это
- (1) социальная гарантия
  - (2) социальная функция
  - (3) авторитет
  - (4) гражданство
  - (5) общественный институт
14. Назовите сторонника теории "общественного договора", по мнению которого, подданные вправе расторгнуть договор (т.е. не подчиняться власти), если суверен нарушает его принципы:
- (1) Бенедикт Спиноза
  - (2) Николо Макиавелли
  - (3) Джон Локк
  - (4) Фома Аквинский
  - (5) Томас Гоббс
15. Укажите ОШИБКУ в утверждениях, относящихся к личности и философским взглядам Аристотеля.
- (1) По мнению Аристотеля, государство принадлежит к тому, что существует по природе, и человек по природе своей есть существо политическое.
  - (2) В наибольшей степени Аристотель симпатизировал демократии как наилучшей форме из реально возможных форм государственного устройства.
  - (3) Аристотель был учеником крупного афинского философа, автора выдающихся произведений "Государство" и "Законы".
  - (4) Аристотель не отрицал частную собственность, но считал, что опорой государства должны быть средние слои общества, не бедные и не слишком богатые.
  - (5) Аристотель выделил семью, селение и полис как особые типы общения, но интересы государства он всегда ставил выше интересов личности.

16. Величина спроса на некоторый товар при цене 20 руб. равняется 1000 единиц. Известно, что при увеличении этой цены на 1% величина спроса уменьшается на 0,5%. Установите зависимость величины спроса от цены, считая ее линейной.
- (1)  $Q_d = 0,5 + 990$
  - (2)  $Q_d = 1500 - 25$
  - (3)  $Q_d = 1010 - 0,5$
  - (4)  $Q_d = 1500 - 25$
  - (5)  $Q_d = 25P - 1500$
17. В стране уровень безработицы равен 15%, численность населения составляет 950 млн. чел, численность трудоспособного населения 630 млн. чел., а количество занятых 510 млн. чел. Выберите верное утверждение о безработице в стране.
- (1) каждый седьмой из трудоспособных безработный
  - (2) ни одно из приведенных утверждений не верно
  - (3) каждый десятый из всего населения безработный
  - (4) безработных 94,5 млн. чел.
  - (5) каждый восьмой из всего населения безработный
18. Профицит государственного бюджета НЕ увеличится, если при прочих равных условиях
- (1) вырастут налоговые сборы
  - (2) вырастет величина собираемого подоходного налога
  - (3) снизятся пособия по безработице
  - (4) вырастут расходы государства на образование
  - (5) снизятся расходы органов власти на образование
19. Принцип ограниченной ответственности в открытом акционерном обществе (корпорации) означает, что (выберите единственный полностью правильный вариант)
- (1) акционеры в случае разорения корпорации могут потерять лишь капитал, вложенный в акции
  - (2) в случае разорения корпорации арест должен быть наложен только на личное имущество самых крупных акционеров - членов Совета Директоров, но не на имущество акционеров рядовых
  - (3) акционеры в случае разорения корпорации отвечают частью недвижимого имущества за долги корпорации
  - (4) акционеры, купившие акции в соответствующем году, не отвечают своей собственностью за долги корпорации, образовавшиеся в предыдущие годы
  - (5) акционеры в случае разорения корпорации теряют обыкновенные акции, но в любом случае сохраняют доходы по акциям привилегированным
20. Понятие "смешанной экономики"
- (1) фиксирует зарождение рыночных отношений в натуральном хозяйстве
  - (2) характеризует соединение рыночных и государственных рычагов регулирования рыночной экономики (при доминировании первых)
  - (3) относится ко всем историческим эпохам
  - (4) характеризует использование товарно-денежных отношений в плановой экономике
  - (5) означает одновременное существование традиционной и плановой экономики



21. В общественном производстве К. Маркс выделил две его стороны:
- (1) способ производства и общественно-экономическая формация
  - (2) прибавочная стоимость и процент
  - (3) базис и надстройка
  - (4) производительные силы и производственные отношения
  - (5) капиталистическая формация и коммунистическая формация
22. Признанная законом способность лица сознавать значение своих противоправных деяний и нести за них юридическую ответственность - это
- (1) дееспособность
  - (2) универсальная правоспособность
  - (3) деликтоспособность
  - (4) специальная правоспособность
  - (5) правоспособность
23. Одна из форм мировых религий запрещает нарушать "покой матери земли". В силу этого у народов, традиционно исповедующих данную религию, не было развито земледелие. Укажите народы, отвечающие данному признаку:
- (1) китайцы, японцы, вьетнамцы
  - (2) мексиканцы, кубинцы, пуэрто-риканцы
  - (3) монголы, калмыки, буряты
  - (4) испанцы, португальцы, итальянцы
  - (5) сирийцы, иорданцы, египтяне
24. Найдите ОШИБКУ в перечне проявлений народной культуры:
- (1) героический эпос
  - (2) популярная кинокомедия
  - (3) обрядовая песня
  - (4) студенческий фольклор
  - (5) заговор знахарки
25. Укажите видного средневекового философа-теолога, отстаивавшего идеи приоритета Божественного закона перед мирским (человеческим) законом:
- (1) Дени Дидро
  - (2) Жюль Ламетри
  - (3) Гуго Гроций
  - (4) Бенедикт Спиноза
  - (5) Фома Аквинский
26. Зависимость спроса ( $Q^*$  на товар от цены  $P$  описывается функцией  $Q^* = 80 - 4P$ . Тогда выручка поставщиков товара будет наибольшей при цене
- (1) 80
  - (2) наибольшую выручку определить невозможно
  - (3) 240
  - (4) 160
  - (5) 120

27. Правительство запланировало, что за пять лет ВВП вырастет в 1,65 раза. Какой минимальный темп роста ВВП должен быть в пятом году из рассматриваемых, если за первый год ВВП вырос в 1,1 раза, за второй - на 12,5%, и за два следующих - на 20%? Выберите наиболее точный ответ:
- (1) 11,1%
  - (2) 9%
  - (3) 18%
  - (4) 15%
  - (5) 22,5%
28. В состав "Большой восьмерки" НЕ входит
- (1) Япония
  - (2) Южная Корея
  - (3) Канада
  - (4) Россия
  - (5) Великобритания
29. Норма обязательных резервов банков - это
- (1) ставка процента, под которую коммерческие банки могут предоставлять кредит друг другу
  - (2) доля кредитов, которую коммерческий банк обязан предоставлять населению для покупки жилья
  - (3) ставка процента, под которую Центральный банк может предоставлять кредит коммерческим банкам
  - (4) доля вкладов, которую коммерческие банки обязаны хранить в Центральном банке
  - (5) доля кредитов, которую коммерческий банк обязан предоставлять строительным фирмам
30. Значение механизма рыночной конкуренции для эффективной рыночной экономики впервые раскрыл
- (1) Г. Спенсер
  - (2) К. Маркс
  - (3) Дж. Гэлбрейт
  - (4) О. Конт
  - (5) А. Смит
31. Укажите понятие, являющееся общим для всех остальных понятий данного вопроса:
- (1) восстановление нарушенного права
  - (2) правомерное поведение гражданина
  - (3) соблюдение установленного запрета
  - (4) формы реализации права
  - (5) исполнение договорного обязательства
32. Выберите единственное ВЕРНОЕ положение, адекватно характеризующее воззрения философа-теолога Аврелия Августина.
- (1) Человек - существо, сотворенное Богом по своему образу и подобию, он может спастись исключительно благодатью Божьей.

- (2) Боги живут в пространствах между мирами и наслаждаются блаженством. Богов надо уважать, но бояться их и просить у них помощи не следует.
- (3) Человек выступает в роли меры всех вещей в том, что они существуют и в том, что они не существуют.
- (4) Человек есть нечто, что должно превзойти. Близится пришествие "сверхчеловека", обретающего свойства богов.
- (5) Человек - Творец подобен Богу.
33. Двухпартийная система как разновидность многопартийной системы функционирует в
- (1) России
  - (2) Великобритании
  - (3) Мексике
  - (4) Германии
  - (5) Италии
34. Назовите мыслителя, который НЕ является автором одного из вариантов теории постиндустриального общества.
- (1) З. Бжезинский
  - (2) А. Турен
  - (3) Ф. Ницше
  - (4) Д. Белл
  - (5) О. Тоффлер
35. Укажите ОШИБКУ в перечне выдающихся философов Античности:
- (1) Лютер
  - (2) Цицерон
  - (3) Аристотель
  - (4) Демокрит
  - (5) Платон
36. Известно, что при цене в 75 руб/кг на рынке было бы реализовано 100 тонн огурцов, а при цене 50 руб/кг - 300 тонн. По экспертным оценкам изменение цены до уровня равновесной приведет к увеличению объема продаж по сравнению с описанными случаями. Отсюда следует, что при стандартном виде кривых спроса и предложения
- (1) равновесная цена может быть больше 50 руб/кг
  - (2) равновесная цена обязательно больше 50 руб/кг
  - (3) равновесная цена может быть больше 75 руб/кг
  - (4) равновесная цена обязательно больше 75 руб/кг
  - (5) описанная ситуация невозможна
  - (6) равновесная цена обязательно меньше 50 руб/кг
37. Вклад в банке каждый месяц увеличивается на 1% по сравнению с предыдущим месяцем. Укажите выражение, наиболее точно оценивающее количество месяцев, за которое вклад вырастет в 1,5 раза.
- (1)  $\frac{1}{1,01^{1,5}}$
  - (2)  $0,01\sqrt[1,5]{1,5}$

- (3)  $\frac{\lg 1,01}{\lg 1,5}$
- (4)  $(1,01)^{150}$
- (5)  $\log_{1,01} 1,5$
- (6) 50 месяцев
38. В стране Анчурии производятся только два товара: тетради и ручки. Производство тетрадей выросло с 10 тыс. штук в 2004 г. до 12 тыс. в 2006 г., производство ручек за эти же годы возросло с 15 тыс. штук до 20 тыс. В этот период цена тетрадей упала с 5 до 3 у.е., а цена ручек упала с 4 до 2 у.е. Тогда можно утверждать, что за период с 2004 по 2006 гг.
- (1) реальный ВВП упал со 110 тыс. до 60 тыс. у.е.
- (2) номинальный ВВП вырос со 110 тыс. до 140 тыс. у.е.
- (3) реальный ВВП вырос со 110 тыс. до 140 тыс. у.е.
- (4) номинальный ВВП упал со 110 тыс. до 60 тыс. у.е.
- (5) реальный ВВП упал со 110 тыс. до 76 тыс. у.е.
- (6) номинальный ВВП вырос со 60 тыс. до 76 тыс. у.е.
39. Два автоматических станка производят одинаковые изделия. Первый делает 16 изделий за 6 минут; второй делает 18 изделий за 8 минут. Каждый из них расходует 4,7 кВт.ч электроэнергии в час по цене 1руб. 84 коп. за 1 кВт.ч. Какой процент составляют затраты на электроэнергию в расчете на одно изделие, произведенное первым станком, от аналогичного показателя для второго станка, если они проработали 5 дней по 8 часов 24 минуты в день? Выберите наиболее точный ответ.
- (1) 76
- (2) 119
- (3) 72
- (4) 84
- (5) 96
- (6) 107
40. В результате освоения новых рынков в каждом из двух филиалов фирмы объем продаж вырос с конца 2005 до конца 2006 года в восемь раз. В конце 2005 и в конце 2006 годов объемы продаж в филиалах были одинаковы. При этом в первом филиале объем продаж рос на одно и то же число рублей в месяц, а во втором - на одно и то же количество процентов ежемесячно (по отношению к предыдущему месяцу). На сколько процентов объем продаж в первом филиале превосходил объем продаж во втором филиале к концу августа 2006 года? Укажите наиболее точный ответ:
- (1) на 33%
- (2) на 67%
- (3) на 58%
- (4) невозможно определить
- (5) на 100%
- (6) на 42%

## ОТВЕТЫ

1. 5; 2. 3; 3. 5; 4. 5; 5. 1; 6. 1; 7. 4; 8. 3; 9. 5; 10. 2; 11. 2; 12. 4; 13. 3; 14. 3; 15. 2;  
16. 4; 17. 1; 18. 4; 19. 1; 20. 2; 21. 4; 22. 3; 23. 3; 24. 2; 25. 5; 26. 5; 27. 1; 28. 2; 29. 4;  
30. 5; 31. 4; 32. 1; 33. 2; 34. 3; 35. 1; 36. 1; 37. 5; 38. 3; 39. 4; 40. 6.

## ГЕОГРАФИЯ

### ВАРИАНТ I

1. Укажите фамилии двух путешественников, совершивших кругосветное путешествие:
  - (1) Х. Колумб
  - (2) В. Беринг
  - (3) Х.-С. Эль-Кано
  - (4) Ф.Ф. Беллинсгаузен
  - (5) Р. Пири
2. На какую максимальную высоту поднимается Солнце на станции Восток в Антарктиде ( $78,5^{\circ}$  ю.ш.) в течение года?
3. Напишите, при извержениях какого вулкана из предлагаемого списка (Кракатау, Попокатепетль, Апо, Руапеху, Мауна-Лоа, Руис, Гекла, Толбачик, Эребус, Рейнир) пепел наверняка достигает столицы:
  - (1) Колумбии
  - (2) Мексики
4. Расставьте горные вершины по убыванию их абсолютной высоты (цифрами):
  - (1) Казбек
  - (2) Монблан
  - (3) Аконкагуа
  - (4) Народная
  - (5) Килиманджаро
5. Укажите 2 острова, в строении земной коры которых отсутствует гранитный слой:
  - (1) Галапагос
  - (2) Врангеля
  - (3) Ньюфаундленд
  - (4) Исландия
  - (5) Ирландия
  - (6) Готланд
  - (7) Виктория
  - (8) Анжу
6. Если в умеренных широтах Северного полушария встать спиной к ветру, то наиболее низкое атмосферное давление обычно будет располагаться (выберите 1 правильный ответ):
  - (1) слева и немного впереди
  - (2) слева и немного сзади
  - (3) справа и немного впереди

(4) справа и немного сзади

(При ответе на вопрос используйте свои знания о направлении движения воздуха в циклонах и антициклонах)

7. Определите крупный остров по следующей характеристике: это область альпийской и мезозойской складчатости; годовая сумма осадков на большей части острова 3000 мм и более, осадки выпадают равномерно в течение года; годовая амплитуда температур  $2 - 3^{\circ}$ ; на острове водится эндемичная человекообразная обезьяна.
8. Парк имеет прямоугольную в плане форму. Длина его в 4 раза больше ширины, а общая площадь составляет 36 га. Каков численный масштаб карты, на котором длина парка равна 4,8 см?
9. Выберите цепочку, в которой зональные почвы расставлены от менее плодородных к более плодородным:
  - (1) тундровые глеевые - подзолистые - бурые лесные - чернозёмы
  - (2) красно-жёлтые ферраллитные - бурые лесные - подзолистые - серозёмы
  - (3) бурые полупустынные - желтозёмы и краснозёмы - каштановые - подзолистые
  - (4) чернозёмы - серые лесные - дерново-подзолистые - тундровые глеевые
10. Сегодня в полдень по московскому времени на часах у жителей о. Ньюфаундленд 4 часа 30 минут. Определите время по Гринвичу.
11. Расположите указанные территории в порядке возрастания мощности земной коры (цифрами):
  - (1) Исландия
  - (2) Мещерская низменность
  - (3) Казахский мелкосопочник
  - (4) Непал
12. Проставьте в цепочках недостающие звенья:
  - (А) р. Ишим - ... - ... - Обская губа
  - (Б) Онежское озеро - ... - ... - р. Нева
13. "Одной строкой": назовите государства, если для них характерно:
  - (а) оно занимает наибольшую площадь на самом по площади полуострове
  - (б) оно целиком расположено в области субтропического климата с равномерным увлажнением по сезонам
  - (в) здесь водятся лемуры
14. Территория национального парка является объектом Всемирного наследия ЮНЕСКО, расположена в одном часовом поясе с одной из крайних точек РФ; здесь находятся одни из самых высоких дюн в Европе, а время сегодня отличается от Гринвичского на 2 часа. Назовите этот национальный парк.
15. Определите географический район, где граница тундр имеет самое южное положение (а), и укажите главную причину этого факта (б):
  - (1) п-ов Чукотка

- (2) п-ов Таймыр
  - (3) п-ов Лабрадор
  - (4) п-ов Скандинавский
  - (5) п-ов Мелвилл
  - (6) п-ов Зеландия
16. Выберите из списка 2 моря, соленость которых не превышает 20‰:
- (1) Восточно-Сибирское
  - (2) Азовское
  - (3) Белое
  - (4) Карское
  - (5) Лаптевых
  - (6) Балтийское
17. Укажите город, для которого существует самая высокая вероятность проявления землетрясений:
- (1) Ханты-Мансийск
  - (2) Ресифи
  - (3) Астана
  - (4) Антананариву
  - (5) Мельбурн
  - (6) Тегеран
  - (7) Ванкувер
18. Укажите 3 ветра, которые способствуют понижению температуры:
- (1) фён
  - (2) бора
  - (3) хамсин
  - (4) сирокко
  - (5) дневной горно-долинный
  - (6) ночной горно-долинный
  - (7) самум
  - (8) господствующий ветер в западном секторе циклона
  - (9) господствующий ветер в восточном секторе циклона
  - (10) западный перенос зимой в Европе
  - (11) западный перенос зимой на севере Антарктического полуострова
19. Укажите лишнее с точки зрения биологической классификации:
- (1) бурый медведь
  - (2) белый медведь
  - (3) барибал
  - (4) панда
  - (5) гризли
  - (6) очковый медведь
  - (7) гималайский медведь
20. Напишите названия 2 субмеридиональных холодных морских течений, целиком расположенных в южном и западном полушариях.

21. Выберите страну с минимальной долей городского населения:
- (1) Бразилия
  - (2) Китай
  - (3) Непал
  - (4) ЮАР
  - (5) Куба
22. Выберите самый восточный город:
- (а) Каир
  - (б) Найроби (в) Хараре
  - (г) Бамако
  - (д) Лилонгве
23. Выберите 2 верные характеристики Польши:
- (1) население более 50 млн. человек
  - (2) многонациональное государство
  - (3) есть запасы каменного угля и развита черная металлургия
  - (4) стала независимым государством в XX в.
  - (5) столица не является крупнейшим городом страны
24. Исходя из знания типа воспроизводства и численности населения, выберите из списка страну, где за год родились 45 тыс. чел., а умерли 20 тыс. чел.
- (1) Болгария
  - (2) Индия
  - (3) Нигерия
  - (4) Россия
  - (5) Сингапур
  - (6) Украина
25. Выберите страну, притягивающую трудовых мигрантов:
- (1) Китай
  - (2) Сенегал
  - (3) Сирия
  - (4) ОАЭ
  - (5) Турция
26. Выберите самую восточную арабскую страну:
- (а) Афганистан
  - (б) Иордания
  - (в) Иран
  - (г) Бруней
  - (д) Бахрейн
27. Эта страна СНГ имеет крупные запасы газа и глауберовой соли. По югу страны проложен крупный оросительный канал. Назовите: 1) страну, 2) оросительный канал.



28. Где проживает больше людей?  
(1) в восточной половине Китая  
(2) в южной половине Индии
29. Определите страну по перечню столиц соседних государств, имеющих с ней общую границу:  
(1) Каракас  
(2) Бразилиа  
(3) Лима  
(4) Кито
30. В предложенном перечне четыре города расположены в одной стране, и только пятый за ее пределами. Найдите этот город:  
(1) Киото  
(2) Осака  
(3) Кавасаки  
(4) Сеул  
(5) Тиба
31. Назовите зерновую сельскохозяйственную культуру, используемую при производстве пива:  
(1) рожь  
(2) рис  
(3) хмель  
(4) пшеница  
(5) ячмень  
(6) просо
32. Укажите группу стран, где одновременно добывают коксующийся уголь и железную руду:  
(1) Польша, Индия  
(2) ЮАР, Чили  
(3) США, Швеция  
(4) Канада, Либерия  
(5) Австралия, Украина
33. Назовите государство - бывший доминион Великобритании, название которого связано с его положением на материке. Эта страна занимает одно из ведущих мест в мире по запасам и добыче руд, золота и алмазов.
34. Выберите верное утверждение: Гуарани - это:  
(1) хвойное дерево, распространенное в Габоне  
(2) рыба, которая водится в реках Южной Америки  
(3) народ в Парагвае  
(4) волокнистая культура, выращиваемая в Сенегале
35. Часть территории этого субъекта России занята Ногайской степью. На юге расположен горный массив с высотами более 4000 м. Укажите: (1) название субъекта  
(2) главную отрасль животноводства

36. Укажите группу сельскохозяйственных культур, которые выращиваются в местностях, имеющих следующие агроклиматические характеристики: сумма активных температур составляет 4000-8000 градусов, коэффициент увлажнения менее 0,33.
- (1) хлопчатник, табак, рис, кукуруза
  - (2) сахарный тростник, кофе, какао, гевея
  - (3) подсолнечник, сахарная свекла, картофель, соя
  - (4) пшеница, рожь, картофель, лен
37. Выберите вариант, где правильно указаны названия городов СССР, в которых до второй мировой войны были построены тракторные заводы:
- (1) Киев, Харьков, Одесса
  - (2) Минск, Рига, Таллин
  - (3) Харьков, Сталинград, Челябинск
  - (4) Челябинск, Свердловск, Куйбышев
  - (5) Красноярск, Иркутск, Владивосток
38. Определите, для каких стран из перечисленных ниже, характерны следующие соотношения производства электроэнергии (в %) на ТЭС - ГЭС - АЭС:
- (1) 71,4-5,6-20,7
  - (2) 8,0-13,5-78,5
  - (3) 80,3 - 18,5 - 1,2
  - (4) 8,3-82,7-4,4
- (а) Китай
  - (б) Бразилия
  - (в) Франция
  - (г) США
39. Укажите страны, конфликтующие из-за островов Сеута и Мелилья.
40. Выберите верные характеристики населения Китая:
- (1) Коэффициент рождаемости в Китае не превышает соответствующий показатель США
  - (2) Уровень урбанизации в КНР выше среднемирового показателя
  - (3) Количество китайцев по происхождению, живущих за пределами КНР, превышает численность населения Польши
  - (4) Среди крупнейших городов Китая - Далянь, Харбин, Инчхон
  - (5) Мужчин в Китае меньше, чем женщин

## ВАРИАНТ II

1. Укажите фамилии двух путешественников, совершивших кругосветное путешествие:
  - (1) Ф.Дрейк
  - (2) Ф.Магеллан
  - (3) И.Ф.Крузенштерн
  - (4) В.Баренц
  - (5) Р.Амундсен
2. На какую максимальную высоту в течение года поднимается Солнце на полярной станции Беллинсгаузен (62,5° ю.ш.)?

3. Напишите, при извержениях какого вулкана из предлагаемого списка (Кракатау, Попокатепетль, Апо, Руапеху, Мауна-Лоа, Котопахи, Гекла, Толбачик, Эребус, Рейнир) пепел наверняка достигает столицы:
- (а) Эквадора
  - (б) Индонезии
4. Расставьте горные вершины по возрастанию их абсолютной высоты (номерами по порядку):
- (1) Мак-Кинли
  - (2) Косцюшко
  - (3) Монблан
  - (4) Ключевская сопка
  - (5) Килиманджаро.
5. Укажите 2 острова, в строении земной коры которых присутствует гранитный слой:
- (1) Исландия
  - (2) Ирландия
  - (3) Анжу
  - (4) Сан-Паулу
  - (5) Тристан-да-Кунья
  - (6) Амстердам
  - (7) Буве
  - (8) Галапагос
6. Если в умеренных широтах Северного полушария встать спиной к ветру, то наиболее высокое атмосферное давление обычно будет располагаться (выберите 1 правильный ответ):
- (1) слева и немного впереди
  - (2) слева и немного сзади
  - (3) справа и немного впереди
  - (4) справа и немного сзади
- (При ответе на вопрос используйте свои знания о направлении движения воздуха в циклонах и антициклонах)
7. Определите полуостров по следующей характеристике: это область мезозойской складчатости; годовая сумма осадков 2000-3000 мм, выпадают в южной половине равномерно, а в северной - с летним максимумом; годовая амплитуда температур  $2 - 4^{\circ}$ ; полуостров лежит в бассейнах двух океанов.
8. Парк имеет прямоугольную в плане форму. Длина его в 3 раза больше ширины, а общая площадь составляет 48 га. Каков численный масштаб карты, на котором длина парка равна 2,4 см?
9. Расположите указанные территории в порядке уменьшения мощности земной коры (цифрами)

- (1) Исландия
  - (2) Мещерская низменность
  - (3) Казахский мелкосопочник
  - (4) Непал
10. Сегодня в полночь по московскому времени на часах у жителей Шри-Ланки 1 час 30 минут. Определите время по Гринвичу.
11. Выберите цепочку, в которой зональные почвы расставлены от более плодородных к менее плодородным:
- (1) чернозёмы - серые лесные - дерново-подзолистые - тундровые глеевые
  - (2) тундровые глеевые - подзолистые - бурые лесные - чернозёмы
  - (3) бурые полупустынные - краснозёмы - каштановые - красно-жёлтые ферраллитные
  - (4) красно-жёлтые ферраллитные - бурые лесные - коричневые - серые лесные
12. Проставьте в цепочках недостающие звенья:
- (А) р. Ишим - ... - р. Обь - ...
  - (Б) р. Белая - ... - ... - Куйбышевское вдхр
13. "Одной строкой": назовите государства, если для них характерно:
- (а) оно наибольшее по площади среди тех, что целиком расположены в пределах рифтогенной земной коры (на срединном океаническом хребте)
  - (б) здесь водится птица киви
  - (в) оно по суше граничит с одним государством и относится к другой части света, нежели то государство
14. Территория данного биосферного заповедника является объектом Всемирного наследия ЮНЕСКО, расположена в одном часовом поясе с одной из крайних точек РФ, в зоне тундры и смешанных хвойно-широколиственных лесов, здесь встречаются гейзеры. Назовите этот заповедник.
15. Определите географический район, где граница тайги заходит дальше всего на север (а), и укажите главную причину этого факта (б):
- (1) п-ов Чукотка
  - (2) п-ов Таймыр
  - (3) п-ов Лабрадор
  - (4) п-ов Скандинавский
  - (5) п-ов Мелвилл
  - (6) п-ов Зеландия
16. Выберите из списка 2 моря, солёность которых не превышает 20‰: (1) Белое
- (2) Аральское
  - (3) Баренцево
  - (4) Черное
  - (5) Карибское
  - (6) Балтийское
17. Укажите город, для которого существует самая высокая вероятность проявления землетрясений:

- (1) Москва
- (2) Мельбурн
- (3) Дакар
- (4) Рейкьявик
- (5) Рио-де-Жанейро
- (6) Хельсинки
- (7) Челябинск

18. Укажите 3 ветра, которые способствуют повышению температуры:

- (1) фён
- (2) бора
- (3) дневной бриз
- (4) ночной бриз
- (5) дневной горно-долинный
- (6) ночной горно-долинный
- (7) летний муссон
- (8) зимний муссон
- (9) господствующий ветер в западном секторе циклона
- (10) господствующий ветер в восточном секторе циклона
- (11) западный перенос летом в Европе

19. Укажите лишнее с точки зрения биологической классификации:

- (1) орангутан
- (2) горилла
- (3) магот
- (4) ревун
- (5) ленивец
- (6) гиббон
- (7) павиан

20. Напишите названия 2 субмеридиональных теплых морских течений, целиком расположенных в южном и восточном полушариях.

21. Выберите страну с максимальной долей городского населения:

- (1) Бурунди
- (2) Непал
- (3) Эфиопия
- (4) Гаити
- (5) Венесуэла

22. Выберите самую восточную арабскую страну:

- (1) Иран
- (2) Оман
- (3) Бутан
- (4) Ирак
- (5) Ливия

23. Выберите 2 верные характеристики Испании:
- (1) население более 50 млн. чел.
  - (2) многонациональное государство
  - (3) есть запасы каменного угля и развита черная металлургия
  - (4) стала независимым государством в XX в.
  - (5) столица - единственный в стране город-миллионер
24. Какая страна производит дешевую электроэнергию, экспортирует нефть и газ:
- (1) Австралия
  - (2) США
  - (3) Ливия
  - (4) Узбекистан
  - (5) Франция
  - (6) Канада
25. Выберите страну, притягивающую трудовых мигрантов:
- (1) Индия
  - (2) Малави
  - (3) Катар
  - (4) Йемен
  - (5) Иордания
26. Выберите самый западный город:
- (1) Нджамена
  - (2) Уагадугу
  - (3) Порто-Ново
  - (4) Луанда
  - (5) Кампала
27. Эта страна СНГ по суше граничит с 3 республиками бывшего СССР. В западной части страны находятся самые высокие отметки рельефа. Назовите: 1) страну, 2) крупнейший ее угольный бассейн
28. Где проживает больше людей?
- (1) в северной половине Италии
  - (2) в северной половине Великобритании
29. Определите страну по перечню столиц соседних государств, имеющих с ней общую границу:
- (1) Варшава
  - (2) Братислава
  - (3) Вена
  - (4) Берлин
30. В предложенном перечне четыре города расположены в одной стране, и только пятый за ее пределами. Найдите этот город:
- (1) Мельбурн
  - (2) Сидней

- (3) Веллингтон
- (4) Канберра
- (5) Перт

31. Назовите главную зерновую сельскохозяйственную культуру, выращиваемую в самых северных частях Казахстана:
- (1) кукуруза
  - (2) рис
  - (3) чумиза
  - (4) яровая пшеница
  - (5) сорго
  - (6) озимая пшеница
32. Назовите карликовое государство Европы, основной статьёй доходной части бюджета которого является туризм. Эта страна граничит с двумя государствами - членами ЕС, население которых исповедует католичество.
33. Зная тип воспроизводства и численность населения, выберите страну, где за год родилось 4,5 млн. чел., а умерло 1,5 млн. чел.:
- (1) Белоруссия
  - (2) Израиль
  - (3) Индонезия
  - (4) Ирландия
  - (5) Куба
  - (6) Ирак
34. Выберите верное утверждение: Тиграи - это
- (1) "родственники" тигров, распространенные в Судане
  - (2) народ в Эфиопии
  - (3) Зразновидность лиан в Патагонии
  - (4) волокнистая культура, выращиваемая в Непале
35. Часть территории этого субъекта России занята Черными землями - безводной полупустынной низменностью. На северо-востоке этот субъект выходит к крупнейшей реке Европейской части страны. Укажите:
- (1) название субъекта
  - (2) главную отрасль животноводства
36. Укажите группу сельскохозяйственных культур, которые выращиваются в местностях, имеющих следующие агроклиматические характеристики: сумма активных температур составляет 1000-2200 градусов, коэффициент увлажнения более 1,0.
- (1) хлопчатник, табак, рис, чай
  - (2) сахарный тростник, кофе, какао, гевея
  - (3) пшеница, рожь, картофель, лен
  - (4) редис, шпинат, репа, картофель
37. Выберите вариант, где правильно указаны названия городов СССР, в которых после второй мировой войны были построены тракторные заводы:

- (1) Липецк, Харьков, Одесса
- (2) Липецк, Чебоксары, Владимир
- (3) Харьков, Сталинград, Челябинск
- (4) Челябинск, Свердловск, Куйбышев
- (5) Красноярск, Иркутск, Владивосток

38. Определите, для каких стран из перечисленных ниже, характерны следующие соотношения производства электроэнергии (в %) на ТЭС - ГЭС - АЭС:

- (1) 60,0-8,4-29,8
- (2) 64,3-20,5 - 14,8
- (3) 28,0-57,9-12,8
- (4) 40,5-0,1-57,0 .
- (а) Россия
- (б) Япония
- (в) Бельгия
- (г) Канада

39. Назовите страны, конфликтующие из-за Фолклендских островов.

40. Выберите верные характеристики населения Индии:

- (1) По численности населения Индия отстает от Китая, но в недалеком будущем догонит его
- (2) Численность крупнейшего народа Индии - хиндустанцев - менее 300 млн чел.
- (3) По численности городского населения Индия занимает 1-е место в мире
- (4) Среди крупнейших городов Индии - Мумбаи (Бомбей), Колкатта (Калькутта), Гуанчжоу (Кантон)
- (5) Мужчин в Индии меньше, чем женщин

## ОТВЕТЫ

### ВАРИАНТ I

**1.** 3,4; **2.** 35 градусов; **3.** 1 — Руисб, 2 — Попокатепетль; **4.** 3–5–1–2–4; **5.** 1,4; **6.** 1; **7.** Калимантан; **8.** 1:25000; **9.** 1; **10.** 9 часов 00 минут; **11.** 1–2–3–4; **12.** (А) — Иртыш — Обь, (Б) — Свирь — Ладожское озеро; **13.** (а) — Саудовская Аравия, (б) — Уругвай, (в) — Мадагаскар; **14.** Куршская коса; **15.** (а)–3, (б) — холодное Лабродорское течение; **16.** 2,6; **17.** 6; **18.** 2,6,8; **19.** 4; **20.** Перуанское, Фолклендское; **21.** 3; **22.** б; **23.** 3,4; **24.** 5; **25.** 4; **26.** д; **27.** 1) — Туркменистан, 2 — Каракумский канал; **28.** 1; **29.** Колумбия; **30.** 4; **31.** 5; **32.** 5; **33.** ЮАР; **34.** 3; **35.** (1) — Дагестан, (2) — овцеводство; **36.** 1; **37.** 3; **38.** 1–г, 2–в, 3–а, 4–б; **39.** Испания и Марокко; **40.** 3,5.

### ВАРИАНТ II

**1.** 1,3; **2.** 51 градус; **3.** (а) — Котопахи, (б) — Кракатау; **4.** 2–4–3–5–1; **5.** 2,3; **6.** 4; **7.** Малакка; **8.** 1:50000; **9.** 4-3-2-1; **11.** 1; **12.** (А) — Иртыш, Обская гкба, (Б) — Нижнекамское вдхр., Кама; **13.** (а) — Исландия, (б) — Новая Зеландия, (в) — Папуа —



Новая Гвинея; **14.** Кроноцкий; **15.** (а)– 4, теплое Норвержское течение; **16.** 4,6; **17.** 4; **18.** 1,5,10; **19.** 5; **20.** Восточно — Австралийское, Мозамбикское; **21.** 5; **22.** 2; **23.** 2,4; **24.** 6; **25.** 3; **26.** 2; **27.** 1 — Украина, 2 — Донецкий; **28.** 1; **29.** Чехия; **30.** 3; **31.** 4; **32.** Андорра; **33.** 3; **34.** 2; **35.** 1 — Калмыкия, 2 — овцеводство; **36.** 3; **37.** 2; **38.** 1–б, 2–а, 3–г, 4–в; **39.** Аргентина и Великобритания; **40.** 1, 2.

## РУССКИЙ ЯЗЫК. СОЧИНЕНИЕ

### *Олимпиада «Абитуриент — 2007» (апрель)*

1. Тема свободы в лирике А. С. Пушкина.
2. Образ Сони Мармеладовой в романе Ф. М. Достоевского «Преступление и наказание».
3. Тема Родины в поэзии С. А. Есенина.

### *Основной экзамен*

#### **Филологический факультет**

1. Тема поэта и поэзии в лирике А. С. Пушкина и М. Ю. Лермонтова.
2. Второстепенные персонажи и их роль в драме А. Н. Островского «Гроза».
3. Изображение Москвы в романе М. А. Булгакова «Мастер и Маргарита».

#### **Экономический факультет**

1. Лирические отступления и их роль в поэме Н. В. Гоголя «Мертвые души».
2. Изображение современности в романе И. С. Тургенева «Отцы и дети».
3. В. В. Маяковский о назначении поэта и поэзии.

#### **Механико–математический факультет, факультет Вычислительной математики и кибернетики, Географический факультет**

1. Мотив одиночества в лирике М. Ю. Лермонтова.
2. А. П. Чехов—враг пошлости и корысти («Ионыч», «Человек в футляре»).
3. ВПоиски смысла жизни в пьесе М. Горького «На дне».