

**A. Azats rounding***Автор: Баев А.Ж..*

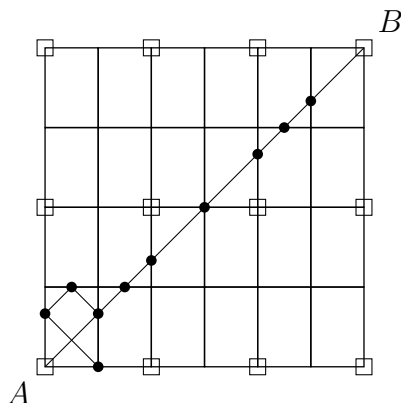
Достаточно, заметить, что в двоичной системе счисления рациональными будут только числа вида  $\frac{1}{2^k}$ . Ответ:  $k$ , если  $n = 2^k$ , в противном случае ответ равен  $(-1)$ .

Асимптотика:  $O(\log n)$ .

**B. Billiards***Автор: Баев А.Ж..*

Отразим исходный прямоугольник  $w \times h$  симметрично относительно каждой из сторон. Полученные прямоугольники снова отразим зеркально относительно каждой из сторон. Таким образом замостим всю плоскость. Все точки, в которые попадают образы левого нижнего угла исходного прямоугольника, образуют сетку с шагом  $(2w, 2h)$ . Первое попадание в одну из данных точек прямой  $(x, y) \cdot t$  при  $t > 0$  и соответствует возврату шара в исходный угол:

$$\begin{cases} 2wn = xt \\ 2hm = yt \end{cases}$$

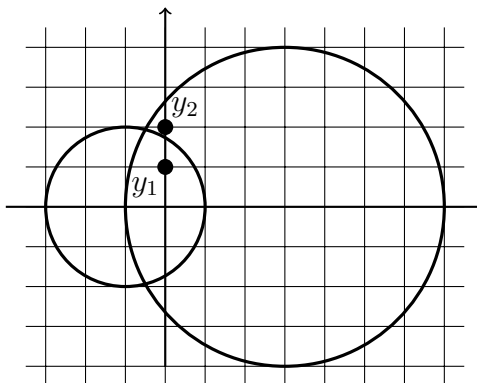


Чтобы найти минимальные подходящие  $n$  и  $m$ , поделим данные уравнения:

$$\frac{m}{n} = \frac{xh}{yw}$$

Пусть  $d = (xh, yw)$  — наибольший общий делитель (можно найти алгоритмом Евклида). Тогда  $n = \frac{xh}{d}$ ,  $m = \frac{yw}{d}$ . А ответ равен  $2n - 1$  и  $2m - 1$ .

Асимптотика:  $O(\log(\max(xh, yw)))$ .

**C. Circles***Автор: Баев А.Ж..*

Для каждого  $x$  можно легко определить максимальное значение  $y_1(x)$  такое, что точка  $(x, y_1(x))$  попадает во внутренность (или на границу) первого круга (в случае, если  $|x - x_1| > r_1$ , то таких точек нет вообще и будем считать  $y_1(x) = -1$ ). Это можно сделать не прибегая к вещественной арифметике, с помощью бинарного поиска  $y_1(x)$  по ответу от 0 до  $r_1 + 1$  с условием, что  $y_1(x)^2 + (x - x_1)^2 \leq r^2$ . Аналогично находим  $y_2(x)$  и находим  $y(x) = \min(y_1(x), y_2(x))$ . В случае, если  $y(x) < 0$ , то подходящих точек с абсциссой  $x$  нет. Иначе их в точности  $2y(x) + 1$ . Таким образом, перебирая все  $x$  от  $\max(x_1 - r_1, x_2 - r_2)$  до  $\min(x_1 + r_1, x_2 + r_2)$  мы найдем ответ.

Асимптотика:  $O(r \log r)$ .

Замечание: перебор за  $O(r^2)$  превышает ограничения по времени.

## D. Diners

Автор: Баяев А.Ж..

Запустим обход в глубину из вершины 1, расставляя у каждой вершины расстояние от корня. Дополнительно найдем  $d$  — максимальную глубину. Далее запустим еще один обход в глубину, при котором для каждой вершины  $v$  проверяем, можно ли от нее дойти вглубь до максимальной глубины  $d$  или нет. Если дойти можно, а сама вершина находится на глубине  $\lceil d/2 \rceil$ , то эта вершина попадает в ответ.

Асимптотика:  $O(n)$ .

## E. Examination aura

Автор: Абдикалыков А.К..

Отсортируем все числа по возрастанию:  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ .

Решение 1. Для каждой пары последовательных вершин  $b_i$  и  $b_{i+1}$  проверяем, хватает ли времени  $k_i$ , чтобы увеличить все элементы с  $b_1$  по  $b_i$  до уровня  $b_{i+1}$ . То есть суммарно увеличить на  $(b_{i+1} - b_i)i \leq k_i$ , где  $k_i$  — количество часов, оставшихся перед просмотром  $i$ -го элемента. Если  $i = n$  или остается время, чтобы дополнить все элементы до уровня  $a_{i+1}$ , то уменьшаем оставшееся время:  $k_{i+1} = k_i - (a_{i+1} - a_i)i$ . В противном случае выводим ответ  $a_i + \lfloor k_i/i \rfloor$ .

Асимптотика:  $O(n \log n)$ .

Решение 2. Фиксируем  $a$  — минимальный уровень, до которого увеличиваем все элементы  $b_i < a$ . Проверяем, хватит ли времени  $k$  для соответствующих элементов:  $\sum_{i=0}^n \max(a - b_i, 0) \leq k$ . Для нахождения максимального подходящего уровня используем бинарный поиск по ответу от 0 до  $\max b_i$ .

Асимптотика:  $O(n(\log n + \log a))$ .

## F. Fibonaccissimo

Автор: Баяев А.Ж..

Числа Фибоначчи с большим индексом можно найти в результате возведения в степень матрицы:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

Причем сделать это можно бинарным возведением в степень:

$$A = \begin{cases} (A^{n/2})^2, & \text{если } n \text{ — четное положительное,} \\ A \cdot (A^{n/2})^2, & \text{если } n \text{ — нечетное,} \\ E, & n = 0 \end{cases}$$

Проблема заключается в том, что само  $F_n$  не помещается стандартный тип. Докажем, что при возведении в степень матрицы Фибоначчи по модулю  $10^9 + 9$  можно использовать аналог малой теоремы Ферма, что позволит значительно упростить нахождение ответа.

Несложно убедиться, что существует такой элемент  $x$ , что  $x^2 \equiv 5 \pmod{10^9 + 9}$ . Значит, существуют элементы  $\sqrt{5}$ ,  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  и  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  по модулю  $10^9 + 9$ . По аналогии с полем вещественных чисел матрицу можно привести к диагональному виду следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ -\lambda_2 & -1 \end{pmatrix} = G\Lambda G^{-1}$$

Тогда ясно, что возведение в степень сводится к возведению в степень диагональной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ -\lambda_2 & -1 \end{pmatrix} = G\Lambda^k G^{-1}$$

А для диагональных элементов матрицы применима малая теорема Ферма  $\lambda^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Значит, малая теорема Ферма применима при возведении в степень данной матрицы по данному модулю.

Теперь можно быстро возводить в степень:

$$A^k \equiv A^{k \bmod (p-1)} \pmod{p}.$$

Во-первых, с помощью матричного возведения находим  $k = F_n \bmod (p-1)$ . Во-вторых, находим  $F_{F_n} = F_k \bmod p$ .

Асимптотика:  $\log n$ .

Замечание: малая теорема Ферма по модулю  $p$  для целочисленных матриц выполняется в том случае, если все собственные значения матрицы существуют по модулю  $p$ .

## G. Good round numbers

Автор: Абдикалыков А.К..

Ответом на задачу является значение  $D(b) - D(a-1)$ , где  $D(m)$  — количество подходящих чисел среди чисел от 1 до  $m$ . Чтобы найти числа с круглостью  $s$  достаточно перебрать числа вида  $n(n+c)$  (это можно сделать за  $O(\sqrt{m})$ ). При этом не забыть отбросить те из них, которые имеют другое разложение  $n_1(n_1+c_1)$ , где  $c_1 < c$ . Несложно убедиться, что все числа вида  $n^2$ ,  $n(n+1)$  и  $n(n+2)$  имеют круглость 0, 1 и 2 соответственно. У чисел вида  $n(n+3)$  имеется единственное исключение:  $4 = 1 \cdot (1+3) = 2 \cdot 2$ , которое имеет круглость 0. У чисел вида  $n(n+4)$  имеется тоже единственное исключение:  $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ , которое имеет круглость 1.

Асимптотика:  $O(\sqrt{B})$ .

Замечание: при более существенных ограничениях на  $C$  асимптотика будет равна  $O(C\sqrt{B})$ .

## H. Hit a ball

Автор: Абдикалыков А.К..

Во всех других задачах можно было найти явные намеки на круги, сферы и шары. В самой задаче можно было посчитать количество слов между запятыми: 3 1 4 1 5 9 ... Название задачи состояло из слов 3, 1 и 4 буквами. Ответ: соответствующая цифра числа  $\pi$ .

Асимптотика:  $O(1)$ .

**I. Incalculable result***Автор: Нуразханов Ч..*

Промоделируем процесс для первых  $\max(a_i + 2, 2k)$  игр (учитывая условия можно было промоделировать 1001 шаг). Игра будет некорректной в двух случаях: либо выигрыш серии наступил до последней неожиданной игры  $a_n$ ; либо после последней неожиданной игры разница  $a_n$ , разница в счете начинает повторяться (то 0, то 1).

Асимптотика:  $O(\max a_i)$ .