A. A sad number

Автор: Абдикалыков А.К..

Любое число n, начиная с 22, можно представить в виде суммы числа, начинающегося с двойки и числа, оканчивающегося двойкой: $n = 2 \cdots + \ldots 2$. А среди чисел от 1 до 21 на требуемую сумму разбить можно только числа 4 и 14.

Асимптотика: $O(1)$.

B. Brute force

Автор: Абдикалыков А.К..

Рассмотрим $1 \leqslant a < b <\leqslant n$. Поскольку $(a, b) = \frac{b}{k}$ для некоторого натурального k, то $(a, b) \leqslant \frac{b}{2} \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. Значение в правой части достигается, если взять $a = \left[\frac{n}{2}\right]$ и $b = 2\left[\frac{n}{2}\right]$.

Асимптотика: $O(1)$.

Замечание: прямой перебор $O(n)$ не проходит по ограничениям времени.

C. Curtains

Автор: Баев А.Ж..

Вместо чисел a_i будем хранить их разности $d_i = a_{i+1} - a_i$. Тогда запрос $a_i := a_i \pm 1$ будет обрабатываться как:

$$d_i := di \mp 1, d_{i-1} := d_{i-1} \pm 1.$$

Чтобы быстро находить максимум, воспользуемся «подсчетом»: будем хранить p_k — сколько раз встречается число k среди чисел d_i. Тогда увеличение d_i на единицу влечёт следующие изменения:

$$p_{d_i} := p_{d_i} - 1, p_{d_{i+1}} := p_{d_{i+1}} + 1.$$

Асимптотика: $O(N + Q)$.

Замечание: с помощью структур поиска (например, *multiset*) можно реализовать решение за $O(Q \log N)$.

D. Dimitriy and broken sum

Автор: Абдикалыков А.К..

Видно, что $a_i = i + b_i \dot{2}^{k-1}$, где $b_i = \pm 1$. Значит,

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \frac{n(n+1)}{2} + (b_0 + b_1 + \cdots + b_n)\dot{2}^{k-1}.$$

При этом суммы b_i легко вычисляются — это периодическая последовательность с периодом 2^k, в начале которой идут 2^{k-1} единиц, затем 2^{k-1} минус единиц, и так далее.

Асимптотика: $O(1)$.

E. Excursion in snowy cube

Автор: Баев А.Ж..

Рассмотрим взвещенный граф, в котором вершины — это точки, а ребра — это длина отрезка между точками в пространстве.

Зафиксируем L. Далее построим кратчайший путь от вершины A до вершины B осуществляется с помощью алгоритма Дейкстры, при этом игнорируем все ребра весом более L.

Очевидно, что если такой путь найдётся для некоторого L, то он найдётся и для любого $L' > L$. Соответственно, подходящее L можно найти бинарным поиском по L из диапазона $[0; K]$ до соответствующей точности. При этом необходимо проверить существует ли вообще такое L (если при $L = K$ такой путь не найдется, то ответ отрицательный).

Асимптотика: $O(N^2 \log K)$.

Замечание: с помощью структур поиска можно реализовать быстрый алгоритм Дейкстры за $O(N \log N \log K)$.

F. Food getting ways

Автор: Баев А.Ж..

Пусть u_i и d_i — число способов дойти до верхнего и нижнего конца i-го переулка соответственно. Тогда ответом на задачу будет d_n, и его можно найти с помощью рекуррентных формул

$$\begin{cases} d_i := (d_{i-1} + u_{i-1}) \bmod M \\ u_i := u_{i-1} \end{cases}$$

если i-ый переулок вида '/' и

$$\begin{cases} d_i := d_{i-1} \\ u_i := (d_{i-1} + u_{i-1}) \bmod M \end{cases}$$

иначе.

Замечание: можно обойтись без хранения всего массивов d и u, каждый раз обновляя только два текущих элемента.

G. Great and mighty

Автор: Баев А.Ж..

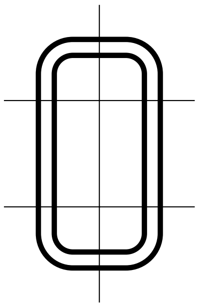
Ответом являлось количество букв в записи числа на трёх языках:

десять	он	ten
6	2	3
два	екі	two
3	3	3

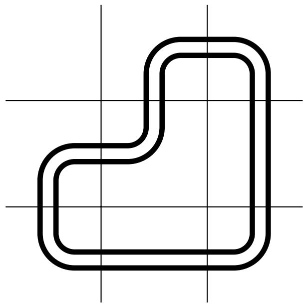
H. Hobby

Автор: Баев А.Ж..

Определить, можно ли собрать замкнутую железную дорогу из A прямых элементов и B уголков. Очевидно, что оба числа в паре (A, B) должны быть чётными; также необходимо, чтобы уголков было как минимум 4 штуки. Рассмотрим сначала случай $A \geqslant 2$. Нам понадобятся базовые сборки (2, 4) и (2, 6).

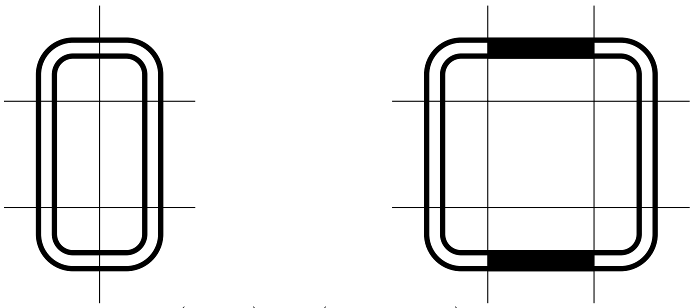


A = 2, B = 4



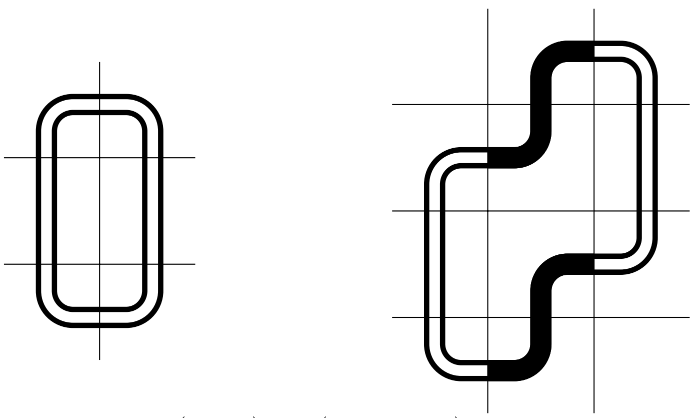
A = 2, B = 6

В любую уже построенную конструкцию можно добавить два прямых элемента. Соответственно, из конструкции с (A, B) элементами, можно получить $(A+2, B)$.



(A, B) → (A + 2, B)

Также в любую уже построенную конструкцию, где имеется хотя бы по два элемента каждого вида, можно добавить четыре уголка.



(A, B) → (A, B + 4)

Соответственно, можно построить дорогу для любой пары $(2n, 2m)$, где $n > 1$, $m > 2$.

Рассмотрим отдельно $A = 0$. Несложно показать, что B обязательно кратно четырем. Используя базовый пример $(0, 12)$ и перебрав меньшие варианты вручную, получаем, что возможны все конструкции вида $(0, 4k)$, кроме $(0, 8)$.

I. IMC problem

Автор: Абдикалыков А.К..

Фиксируем число k. Посчитаем сколько чисел такого вида не превосходят k. Для это для каждой степени двойки такой, что $2^i \leqslant k$ достаточно перебрать все степени пятерки такой, что $5^j 2^i \leqslant k$. Ясно что итоговое количество таких чисел будет не больше, чем $\log_2 k \log_5 k$. Так количество подходящих чисел с ростом k не уменьшается, то можно использовать бинарный поиск на отрезке $[0; 10^{18}]$.

Асимптотика: $O(\log^2 n)$.

Замечание: учитывая, что $n \leqslant 813$, можно просто сгенерировать все числа.

J. Join the knowledge

Автор: Абдикалыков А.К..

Найдём число компонент связности обходом в ширину или глубину, и каждой клетке присвоим соответствующий номер. Если компонент больше 4, то ответ заведомо «нет». В противном случае нужно будет перебрать все клетки со стенами и проверить, найдется ли среди них такая, которая имеет общую сторону с каждой компонентой связности.

Асимптотика: $O(n^2)$.

K. Keg and dipper

Автор: Баев А.Ж..

Будем перебирать количество ковшей N начиная с 1. Заметим, что ответ на задачу не меняется, если уменьшить все температуры на одно и тоже число. Уменьшим всё на C: $A_1 = A-C$, $B_1 = B-C$, $H_1 = H - C$. Остается найти такое N, что $A_1 \leqslant \frac{xH_1}{N} \leqslant B_1$. То есть существует целое x между $\frac{A_1 N}{H_1}$ и $\frac{B_1 N}{H_1}$. Так как при $N = H_1$ данные числа будут гарантировано целыми, то перебор не превысит H проверок.

Асимптотика: $O(H)$.

L. Lazy programming

Автор: Абдикалыков А.К..

$\tau(k)$ является нечётным тогда и только тогда, когда k — точный квадрат. Таким образом, задача сводится к проверке на чётность число точных квадратов, не превосходящих n. Чётность искомой суммы совпадает с чётностью числа $[\sqrt{n}]$.

Асимптотика: $O(1)$.