

A. Automultiplicative numbers*Автор: Абдикалыков А.К..*

Автомультимпликативными числами будут только однозначные числа, так как если число разрядов $n \geq 1$, то

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \geq 10^{n-1} \cdot a_1 > 9^{n-1} \cdot a_1 \geq a_1 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Ответ: $\max(\min(b, 9) - a + 1, 0)$.

Асимптотика: $O(1)$.

B. BNF*Автор: Абдикалыков А.К..*

Символ c может находиться на любой из N позиций. Остальные позиции могут быть заняты одним из 2 символов: a или b . Общее количество строк: $2^{N-1}N$. Стоит отметить, что ответ должен быть вычислен по модулю, соответственно, все умножения производятся по модулю. Ограничения N не позволяют вычислять 2^{N-1} наивно — следовало воспользоваться бинарным возведением в степень:

$$2^K = \begin{cases} 2^{K/2}, & \text{если } K \text{ — четное,} \\ 2^{K/2} \cdot 2, & \text{если } K \text{ — нечетное,} \\ 1, & \text{если } K = 0 \end{cases}$$

Асимптотика: $O(\log N)$.

C. Cheer up!

Обозначим $dp[n][s]$ — вероятность того, что после n бросков выпадет сумма s . По определению полной вероятности:

$$dp[n][s] = \frac{1}{6} \sum_{i \in [1;6], x[i] \leq s} dp[n-1][s-x[i]].$$

Начальные значения: $dp[0][0] = 1.0$, $dp[i][0] = 0.0$ при всех $i > 0$.

Асимптотика: $O(ns)$.

D. Decks*Автор: Баев А.Ж..*

Для каждой строки подсчитаем $count[i][c]$ сколько раз в i -й строке встречается символ c (каждая из 26 возможных букв). Далее для каждой буквы выберем минимальное значение среди всех строк $ans[c] = \min_{1 \leq i \leq n} count[i][c]$. Выведем каждый символ c в количестве $ans[c]$.

Асимптотика: $O(n)$.

E. Ellipse*Автор: Баев А.Ж..*

Эллипс с полуосями a и b (где $a > b$) получается из окружности радиуса a параллельным проектированием, при котором все площади умножаются $\frac{b}{a}$. Соответственно, достаточно решить задачу для окружности. Максимальную площадь будет иметь правильный n -угольник, вписанный в окружность радиуса a : $\frac{na^2}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Ответ: $\frac{nab}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Асимптотика: $O(1)$.

F. Flip*Автор: Баев А.Ж..*

Необходимо было посчитать количество совпадающих символов в исходной и перевернутой строке.

Асимптотика: $O(n)$.

G. GOR*Автор: Баев А.Ж..*

Реализовать наивное решение можно с помощью рекурсивного определения:

$$gor(x, y) = \begin{cases} gor(\lfloor \frac{x}{g} \rfloor, \lfloor \frac{y}{g} \rfloor) \cdot g + (x + y) \bmod g, & \text{если } x > 0, y > 0 \\ x + y, & \text{если } x = 0 \text{ или } y = 0 \end{cases}$$

Но ограничения по времени не дают возможности просчитать всё наивно, поэтому оптимизируем операцию. Основная идея заключается в том, что операция производится независимо по всем разрядам (при записи чисел в g -чной системе счисления). Поэтому результат можно вычислить отдельно по каждому разряду.

Вычислим за $O(1)$ сумму из N подряд идущих чисел от gk до $gk + (g - 1)$. Рассмотрим некоторый разряд, отличный от младшего. У всех g чисел он будет одинаковым. Так как сумма g одинаковых чисел при делении на g дает остаток ноль, то все разряды результата, отличные от младшего, равны нулю. Рассмотрим самый младший разряд: это сумма чисел от 0 до $g - 1$ по модулю g . Если g нечетно, то сумма равна нулю, если g четно — $g/2$.

Теперь можно суммировать все числа эффективно: ищем минимальное $L \geq A$ и максимальное $R \leq B$, которые кратны g . Находим результат вычисления от A до $L - 1$ наивно, от L до $R - 1$ эффективно и от R до B наивно.

Асимптотика: $O(g \log n / \log g)$.

H. Holes*Автор: Абдикалыков А.К..*

Рассмотрим граф, у которого вершины — клетки, а ребрами соединены либо соседние по границе клетки, либо клетки с одинаковым буквенным обозначением. Запустим обход в ширину или в глубину из левого верхнего угла и проверим, достигим ли правый нижний угол.

Асимптотика: $O(nm)$.

I. Interesting permutation*Автор: Абдикалыков А.К..*

Пусть $(q - 1)^2 < n \leq q^2$. Построим решение жадно: для n выберем позицию a_n так, что $n + a_n = q^2$. Следует принять во внимание, что a_n определяется корректно ($a_n \leq n$), так как

$$\begin{aligned} (q - 1)^2 &\leq n - 1 \\ q &\leq \sqrt{n - 1} + 1 \\ q^2 - n &\leq 2\sqrt{n - 1} \leq n \end{aligned}$$

так как $4n - 4 \leq n^2$. Таким же образом можно расставить числа $(n - k)$ на позиции $a_{n-k} = q^2 - (n - k)$, для которых $a_{n-k} \leq n$, то есть $k \leq 2n - q^2$.

Среди еще не расставленных чисел (это все числа от 0 до $q^2 - n - 1$) выберем максимальное и проведем такую процедуру.

Асимптотика: $O(n)$.

Замечание: ответов может несколько, данное решение строит только один из вариантов.