МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

# КАЗАХСТАНСКИЙ ФИЛИАЛ

## Варианты вступительных экзаменов по математике (2004 год)

АСТАНА 2005 год

# Варианты вступительных экзаменов по математике (2001 – 2004)

Тексты решений задач написаны
*Г. К. Оралбаевым,*
*Б. А. Турешбаевым*

В брошюре приведены варианты письменных вступительных экзаменов и олимпиад «Абитуриент — 2004» по математике, которые проводились в 2004 году на механико-математическом факультете, факультете вычислительной математики и кибернетики и экономическом факультете Казахстанского филиала МГУ им. М. В. Ломоносова. Для каждого экзамена опубликованы два варианта: один из них — с краткими решениями всех задач, а другой — с ответами.

В конце брошюры приведены варианты 2001 – 2003 гг. с решениями, а также опубликована программа вступительных экзаменов по математике для поступающих.

Для учащихся старших классов, учителей математики, абитуриентов.

# Олимпиада «Абитуриент — 2004» (апрель)

## Вариант I

1. Решить уравнение
$$6\sin^2 x + \cos 2x - 3 = 0.$$

2. Решить уравнение
$$\sqrt{8x^2 - 7} = 3x - 4.$$

3. Решить неравенство
$$\frac{1}{\log_x 2} - \log_2 \frac{1}{x} \leqslant 2.$$

4. Из пункта $A$ в пункт $B$ с постоянной скоростью двигалась колонна машин. На половине пути у одной из машин произошла поломка, на устранение которой потребовалась $1/12$ часть времени, за которое колонна проходит весь путь. Во сколько раз нужно увеличить скорость отставшей машины для того, чтобы она въехала в $B$ одновременно с колонной?

5. Определить область значений параметра $a$, при которых уравнение
$$2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$$
не имеет действительных решений.

6. Отрезок $KL$ является диаметром некоторой окружности. Через его концы $K$ и $L$ проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках $P$ и $Q$, лежащих по одну сторону от прямой $KL$. Найти радиус окружности, если $\angle PKL = \pi/3$ и точка пересечения прямых $KP$ и $QL$ удалена от точек $P$ и $Q$ на расстояние 1.

7. Решить неравенство
$$\frac{2 + \log_3 x}{x - 1} < \frac{6}{2x - 1}.$$

8. Основанием пирамиды $PQRS$ является прямоугольный треугольник $PQR$, в котором гипотенуза $QR$ равна 2 и катет $PQ$ равен 1. Длины ребер $PS$, $QS$, $RS$ равны между собой. Сфера радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ касается ребра $RS$, продолжений ребер $PS$, $QS$ за точку $S$ и плоскости $PQR$. Найти величину отрезка касательной, проведенной из точки $Q$ к сфере.

## *Решения*

**1.** $\boxed{\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.}$

Решение. По формуле половинного угла $\left(\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right)$ имеем

$$6\sin^2 x + \cos 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(1-\cos 2x) + \cos 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

**2.** $\boxed{\text{Ответ: } x = 23.}$

Решение.

$$\sqrt{8x^2-7} = 3x-4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x-4 \geqslant 0, \\ 8x^2-7 = (3x-4)^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 4/3, \\ 8x^2-7 = 9x^2-24x+16 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 4/3, \\ x^2-24x+23 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 4/3, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 23 \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 23.$$

**3.** $\boxed{\text{Ответ: } x \in (0;\ 1) \cup (1;\ 2].}$

Решение. Учитывая, что $\dfrac{1}{\log_x 2} = \log_2 x$ при условии $x \neq 1$ и равенство $\log_2 \dfrac{1}{x} = -\log_2 x$, получим

$$\frac{1}{\log_x 2} - \log_2 \frac{1}{x} \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log_2 x + \log_2 x \leqslant 2, \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log_2 x \leqslant 1, \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log_2 x \leqslant \log_2 2, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Принимая во внимание тот факт, что функция $\log_2 x$ является возрастающей, и ее область определения ($x > 0$), имеем

$$\begin{cases} \log_2 x \leqslant \log_2 2, \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0;\ 1) \cup (1;\ 2].$$

**4.** $\boxed{\text{Ответ: } 6/5.}$

<u>Решение</u>. Обозначим через $V$ скорость колонны, через $S$ — расстояние от пункта $A$ до пункта $B$. Тогда колонна проедет весь путь за время

$$t = \frac{S}{v}.$$

Пусть машина после устранения поломки поехала со скоростью $xv$. Тогда на весь путь она потратит

$$\frac{S/2}{v} + \frac{t}{12} + \frac{S/2}{xv}$$

времени. Подставляя $t$ вместо $\frac{S}{v}$, напишем уравнение согласно условию задачи

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{12} + \frac{t}{2x} = t.$$

Сокращая на $t$ (поскольку $t \neq 0$), получим уравнение

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2x} = \frac{5}{12} \quad \Leftrightarrow \quad x = 6/5.$$

**5.** $\boxed{\text{Ответ: } a \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty).}$

<u>Решение</u>. По формуле косинуса двойного угла ($\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$) имеем

$$2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(2\cos^2 x - 1) - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^2 x - 4a\cos x + a^2 = 0.$$

После замены $t = \cos x$ получим квадратное уравнение

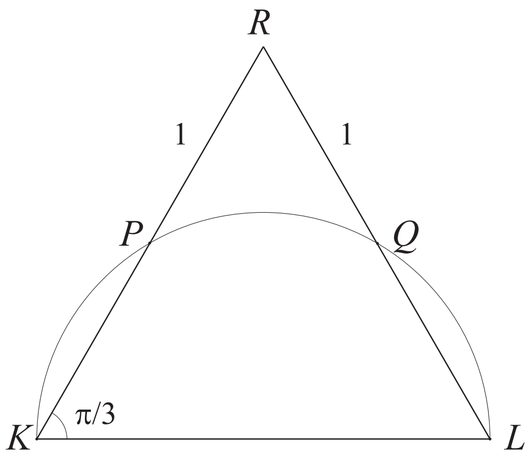
$$4t^2 - 4at + a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2t - a)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{a}{2}.$$

Уравнение $\cos x = \dfrac{a}{2}$ не имеет решений, только если $\dfrac{a}{2} > 1$ или $\dfrac{a}{2} < -1$. Поэтому область значений параметра $a$, удовлетворяющая условию задачи есть совокупность

$$\left[\begin{array}{l} a/2 > 1, \\ a/2 < -1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a > 2, \\ a < -2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-\infty;\, -2) \cup (2;\, +\infty).$$

**6.** $\boxed{\text{Ответ: } 1.}$

Решение.




Пусть $R$ — точка пересечения прямых $KP$ и $LQ$. Треугольник $PRQ$ по условию является равнобедренным, тогда $\angle KPQ = \angle LQP$, следовательно, $\angle KLQ = \pi/3$ т.е. $\triangle KPL$ — равносторонний треугольник. $LP$ — высота (а значит медиана) в нем, поэтому $|KP| = 2|PR| = 2$. Радиус окружности равен

$$\frac{|KL|}{2} = \frac{|KR|}{2} = 1.$$

**7.** $\boxed{\text{Ответ: } x \in \left(\frac{1}{2};\, 1\right).}$

Решение.

$$\frac{2 + \log_3 x}{x - 1} < \frac{6}{2x - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 > 0, \\ 2 + \log_3 x < \frac{6(x-1)}{2x-1}, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 < 0, \\ 2 + \log_3 x > \frac{6(x-1)}{2x-1}, \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ \log_3 x < \frac{2x-4}{2x-1}, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ \log_3 x > \frac{2x-4}{2x-1}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Обозначим $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \frac{2x-4}{2x-1} = 1 - \frac{3}{2x-1}$. Заметим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются монотонно возрастающими. Решим отдельно каждую из систем.

1)

$$\begin{cases} x > 1, \\ \log_3 x < \frac{2x-4}{2x-1} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Покажем, что эта система не имеет решения. Для этого разобьем промежуток $(1;\, +\infty)$ на три:

$$(1;\, +\infty) = (1;\, 2] \cup (2;\, 3] \cup (3;\, +\infty),$$

и рассмотрим неравенство на каждом из них.

а) $x \in (1;\, 2]$, тогда $f(x) > f(1) = 0$ и $g(x) \leqslant g(2) = 0$, откуда следует $f(x) > g(x)$ для всех $x \in (1;\, 2]$.

б) $x \in (2;\, 3]$, тогда $f(x) > f(2) = \log_3 2$, $g(x) \leqslant g(3) = 2/5$. Проверим, что $\log_3 2 > 2/5$. Действительно, имеем цепочку эквивалентных неравенств

$$\log_3 2 > \frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 2 > 3^{2/5} \quad \Leftrightarrow \quad 2^5 > 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad 32 > 9.$$

Отсюда следут, что$f(x) > g(x)$ при $x \in (2;\, 3]$.

в) $x \in (3;\, +\infty)$, тогда $f(x) > f(3) = 1$ и $g(x) < 1$ , т. е. $f(x) > g(x)$.

2)

$$\begin{cases} x < 1, \\ \log_3 x > \frac{2x-4}{2x-1} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < x < 1,\ x \neq 1/2, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

а) $x \in (0;\, 1/2)$. Тогда $f(x) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) = 0$, а $g(x) > 1$, следовательно, на промежутке $(0;\, 1/2)$ нет решений неравенства $f(x) > g(x)$.

б) $x \in (1/2;\, 1)$. Тогда $f(x) > f(1/2) = \log_3(1/2) = -\log_3 2$, а $g(x) < g(1) = -2$. Покажем, что $-\log_3 2 > -2$. Имеем

$$-\log_3 2 > -2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_3 2 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < 9.$$

Отсюда следует,что для всех $x \in (1/2;\, 1)$ справедливо неравенство

$$f(x) > g(x).$$

**8.** $\boxed{\text{Ответ: } \sqrt{2+\sqrt{3}}.}$

Решение. Обозначим через $S'$ и $O'$ ортогональные проекции точки $S$ и центра сферы соответственно на плоскость $PQR$. Поскольку $QS = PS = RS$, то $S'$ — центр описанной окружности около треугольника $PQR$, т. е. $S'$ – середина гипотенузы $QR$.

Из того, что плоскость $QRS$ перпендикулярна плоскости $PQR$, и сфера касается $RS$ и продолжения $QS$, и $QS = RS$ получим $SS'$ равен радиусу сферы. Кроме того, поскольку $SQ = SP$ и их продолжения касаются сферы, то $O'$ лежит на серединном перпендикуляре отрезка $QP$.

Рассмотрим треугольник $SOR$, в котором $\angle S = \pi/4$, $RS = \sqrt{3/2}$, и высота, $OH$ равна $\sqrt{2}/2$ ($H$ — точка касания $SR$ и сферы).

Тогда

$$RH = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad RO' = RH = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},$$

следовательно, по теореме косинусов для треугольника $S'O'R$ получим $S'O' = 1$, т. е. $O'$ лежит на окружности, описанной около треугольника $PQR$. Итак,

$$QO' = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

## Вариант II

1. Решить уравнение
$$\cos 2x + 1 + 6\cos^2 x = 0.$$

2. Решить уравнение
$$\sqrt{3x^2+9} = 2x - 3.$$

3. Решить неравенство
$$\log_4 \frac{1}{x} > \frac{1}{\log_x 4} - 1.$$

4. Чтобы наполнить бассейн включили одновременно два насоса, один из которых в два раза производительнее другого. Когда бассейн наполнился на $3/4$, более производительный насос отключили. Во сколько раз при этом увеличится время наполнения бассейна по сравнению с тем, которое было бы при одновременной работе двух насосов до наполнения бассейна?

5. Определить область значений параметра $b$, при которых уравнение
$$\cos 2y + 4b\cos y + 2b^2 + 1 = 0$$
не имеет действительных решений.

6. В треугольнике $PQR$ величина угла $QPR$ равна $\pi/3$. Через вершины $P$ и $R$ проведены перпендикуляры к сторонам $QR$ и $PQ$ соответственно. Точка пересечения этих перпендикуляров удалена от вершин $P$ и $R$ на расстояние 1. Найти величины сторон треугольника $PQR$.

7. Решить неравенство
$$\frac{2^{x+1}-7}{x-1} < \frac{10}{3-2x}.$$

8. Основанием пирамиды является треугольник $PQR$, в котором $|PR| = 2$, $\angle Q = \pi/4$, $\angle R = \pi/3$. Вершина $S$ пирамиды равноудалена от точек $P$ и $Q$. Сфера касается ребер $PS$, $QS$, продолжения ребра $RS$ за точку $S$ и плоскости $PQR$. Точка касания с плоскостью основания пирамиды и ортогональная проекция вершины $S$ на эту плоскость лежат на окружности, описанной вокруг треугольника $PQR$. Найти величины ребер $PS$, $QS$, $RS$.

## *Ответы:*

**1.** $\pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
**2.** 12;
**3.** $x \in (0;\, 1) \cup (1;\, 2)$;
**4.** $1,5$;
**5.** $b \in (-\infty;\, -1) \cup (1;\, +\infty)$;
**6.** $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$;
**7.** $(1;\, 3/2)$;
**8.** $1+\sqrt{3}$, $1+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$;

# Олимпиада «Абитуриент — 2004» (Астана)

## Вариант III

1. Решить неравенство
$$\frac{7}{9^x-2} \geqslant \frac{2}{3^x-1}.$$

2. Решить уравнение
$$|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}.$$

3. Длина диагонали $BD$ трапеции $ABCD$ равна $m$, а длина боковой стороны $AD$ равна $n$. Найти длину основания $CD$, если известно, что длины основания, диагонали и боковой стороны трапеции, выходящих из вершины $C$, равны между собой.

4. Решить неравенство
$$\log_9\left(\log_{\frac{1}{2}}|x|-1\right) \leqslant \frac{1}{2}.$$

5. Решить уравнение
$$5^{\frac{1}{2}+\log_5\cos x} + 10^{\frac{1}{2}} = 15^{\frac{1}{2}+\log_{15}\sin x}.$$

6. Решить уравнение
$$2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{8}\right) - 2\sin\left(\frac{x}{6}-\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{12}-\frac{\pi}{16}\right) + 3\cos\left(\frac{x}{12}-\frac{\pi}{16}\right).$$

7. Найти все значения параметра $b$, для каждого из которых все корни уравнений
$$x^2+\frac{8x}{b}-2b=0 \quad \text{и} \quad x^2+\frac{6x}{b}-b=0$$
различны и перемежаются, т.е. оба уравнения имеют два корня и между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины сторон $AB$ и $CD$, равна одному метру. Найти длину отрезка, соединяющего середины сторон $BC$ и $AD$.

9. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник $ABC$, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро $SC$ перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку $S$ и середину ребра $BC$, а другая проходит через точку $C$ и середину ребра $AB$.

10. Внутри прямого кругового конуса, касаясь основания, лежат три шара радиусов 4, 4 и 5. Каждый из них касается двух других и некоторой образующей конуса. Найти радиус основания конуса, если известно, что угол между основанием и образующей равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

## *Решения*

**1.** $\boxed{\text{Ответ: } x \in [-\log_3 2;\ 0) \cup \left(\dfrac{1}{2}\log_3 2;\ 1\right].}$

Решение. После замены $3^x = y$ получим

$$\frac{7}{y^2-2} \geqslant \frac{2}{y-1} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{7}{y^2-2} - \frac{2}{y-1} \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-2y^2+7y-3}{(y^2-2)(y-1)} \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(y-3)(y-\frac{1}{2})}{(y-\sqrt{2})(y+\sqrt{2})(y-1)} \leqslant 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, найдем

$$y \in (-\infty;\ -\sqrt{2}) \cup \left[\frac{1}{2};\ 1\right) \cup (\sqrt{2};\ 3].$$

Возвращаясь к замене $y = 3^x > 0$, получим

$$\left[\begin{aligned} &1/2 \leqslant 3^x < 1, \\ &\sqrt{2} < 3^x \leqslant 3 \end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} &x \in [\log_3 1/2;\ 0), \\ &x \in (\log_3 \sqrt{2};\ 1] \end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [-\log_3 2;\ 0) \cup \left(\frac{1}{2}\log_3 2;\ 1\right].$$

**2.** $\boxed{\text{Ответ: } x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.}$

Решение.

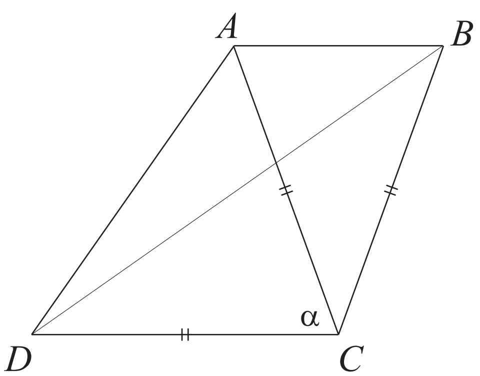
$$|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \operatorname{ctg} x \geqslant 0, \\ \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}, \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{ctg} x < 0, \\ -\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} x < 0, \\ 2\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x < 0, \\ \frac{2\cos x + 1}{\sin x} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x < 0, \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

**3.** $\boxed{\text{Ответ: } x = \dfrac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}.}$

Решение.




Обозначим $\angle ACD = \alpha$ и покажем, что $\angle BCD = \pi - \alpha$.

Действительно, $\angle ABC = \angle BAC = \alpha$, следовательно, $\angle BCA = \pi - 2\alpha$, поэтому $\angle BCD = \pi - \alpha$.

Обозначая $CB = CA = CD = x$, по теореме косинусов в треугольниках $ACD$ и $BCD$ получим

$$n^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos\alpha = 4x^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$m^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos(\pi - \alpha) = 4x^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Складывая последние равенства, найдем

$$4x^2 = m^2 + n^2, \text{ т. е. } x = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}.$$

**4.** $\boxed{\text{Ответ: } x \in \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{16}\right] \cup \left[\dfrac{1}{16}; \dfrac{1}{2}\right).}$

<u>Решение</u>.

$$\log_9(\log_{1/2}|x| - 1) \leqslant \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \log_9(\log_{1/2}|x| - 1) \leqslant \log_9 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log_{1/2}|x| - 1 \leqslant 3, \\ \log_{1/2}|x| - 1 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log_{1/2}|x| \leqslant 4, \\ \log_{1/2}|x| > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log_{1/2}|x| \leqslant \log_{1/2}\frac{1}{16}, \\ \log_{1/2}|x| > \log_{1/2}\frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x| \geqslant 1/16, \\ |x| < 1/2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{16}\right] \cup \left[\frac{1}{16}; \frac{1}{2}\right).$$

**5.** $\boxed{\text{Ответ: } x = \dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.}$

<u>Решение</u>.

$$5^{\frac{1}{2}+\log_5\cos x} + 10^{\frac{1}{2}} = 15^{\frac{1}{2}+\log_{15}\sin x} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{5}\cdot 5^{\log_5\cos x} + \sqrt{10} = \sqrt{15}\cdot 15^{\log_{15}\sin x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{5}\cos x + \sqrt{10} = \sqrt{15}\sin x, \\ \cos x > 0,\ \sin x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}, \\ \cos x > 0,\ \sin x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x > 0,\ \sin x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x > 0,\ \sin x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \cos x > 0,\ \sin x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{13\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ \cos x > 0,\ \sin x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

**6.** $\boxed{\text{Ответ: } -\dfrac{13\pi}{4} + 12\pi n,\ \dfrac{5\pi}{4} + 8\pi k,\ -\dfrac{\pi}{12} + 8\pi m,\ n, k, m \in \mathbb{Z}.}$

<u>Решение</u>. Разделив обе части на $2\sqrt{3}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{x}{6}-\frac{5\pi}{12}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{12}-\frac{\pi}{16}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{x}{12}-\frac{\pi}{16}\right)\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\sin\left(\frac{x}{12}+\frac{13\pi}{48}\right)\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{7\pi}{48}\right)=\sin\left(\frac{x}{12}+\frac{13\pi}{48}\right)\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin\left(\frac{x}{12}+\frac{13\pi}{48}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{7\pi}{48}\right)-1\right)=0\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{x}{12}+\frac{13\pi}{48}\right)=0,\\ \cos\left(\frac{x}{4}-\frac{7\pi}{48}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\frac{x}{12}+\frac{13\pi}{48}=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ \frac{x}{4}-\frac{7\pi}{48}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=-\frac{13\pi}{4}+12\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{5\pi}{4}+8\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{\pi}{12}+8\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

**7.** $\boxed{\text{Ответ: } b\in(-2;\,0).}$

Решение. Пусть $x_1, x_2$ — корни первого уравнения, $x_3, x_4$ — корни второго.

Имеем
$$x_{1,2}=-\frac{4}{b}\pm\sqrt{\frac{16}{b^2}+2b},$$
$$x_{3,4}=-\frac{3}{b}\pm\sqrt{\frac{9}{b^2}+b}.$$
Для того, чтобы $x_1\neq x_2$ и $x_3\neq x_4$ необходимо и достаточно
$$\begin{cases}2b+16/b^2>0,\\ b+9/b^2>0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad b\in(-2;\,0)\cup(0;\,+\infty).$$
Теперь заметим, что $x_1$ и $x_2$ расположены от точки $-4/b$ на расстоянии $\sqrt{2b+16/b^2}$, $x_3$ и $x_4$ — от точки $-3/b$ на расстоянии $\sqrt{b+9/b^2}$. Поэтому, для того, чтобы между двумя корнями одного уравнения был расположен ровно один корень другого уравнения, необходимо и достаточно
$$\begin{cases}\left|-\frac{4}{b}-\left(-\frac{3}{b}\right)\right|<\sqrt{\frac{16}{b^2}+2b}+\sqrt{\frac{9}{b^2}+b},\\ \left|\sqrt{\frac{16}{b^2}+2b}-\sqrt{\frac{9}{b^2}+b}\right|<\left|-\frac{4}{b}-\left(-\frac{3}{b}\right)\right|\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\frac{1}{|b|}<\frac{\sqrt{16+2b^3}+\sqrt{9+b^3}}{|b|},\\ \frac{|\sqrt{16+2b^3}-\sqrt{9+b^3}|}{|b|}<\frac{1}{|b|}\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\sqrt{16+2b^3}+\sqrt{9+b^3}>1,\\ |\sqrt{16+2b^3}-\sqrt{9+b^3}|<1,\\ b\neq 0.\end{cases}\qquad(*)$$

Решим отдельно каждое из неравенств, предварительно сделав замену $t = b^3$.

$$\sqrt{16+2t}+\sqrt{9+t}>1 \quad\Leftrightarrow\quad 25+3t+2\sqrt{16+2t}\sqrt{9+t}>1 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{16+2t}\sqrt{9+t}>-24-3t \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{2}\sqrt{8+t}\sqrt{9+t}>-3(8+t).$$

Легко видеть, что $t>-8$, поэтому левая часть последнего неравенства всегда положительна, а правая отрицательна, следовательно, решением является $t>-8$.

Далее,

$$\left|\sqrt{16+2t}-\sqrt{9+t}\right|<1 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\sqrt{16+2t}-\sqrt{9+t}<1,\\ \sqrt{16+2t}-\sqrt{9+t}>-1\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\sqrt{16+2t}<\sqrt{9+t}+1,\\ \sqrt{16+2t}+1>\sqrt{9+t}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}16+2t<10+t+2\sqrt{9+t},\\ 17+2t+2\sqrt{16+2t}>9+t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}t+6<2\sqrt{9+t},\\ 2\sqrt{16+2t}>-8-t\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}2\sqrt{9+t}>t+6,\\ 2\sqrt{2}\sqrt{8+t}>-(8+t)\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4(9+t)>(t+6)^2,\\ t\geqslant -6,\end{cases}\\ t<-6,\end{array}\right.\\ t>-8\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t^2+8t<0,\\ t\geqslant -6,\end{cases}\\ t<-6,\end{array}\right.\\ t>-8\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\in(-8;\,0),\\ t\geqslant -6,\end{cases}\\ t<-6,\end{array}\right.\\ t>-8\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\in[-6;\,0),\\ t<-6,\end{array}\right.\\ t>-8\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}t<0,\\ t>-8\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad t\in(-8;\,0).$$

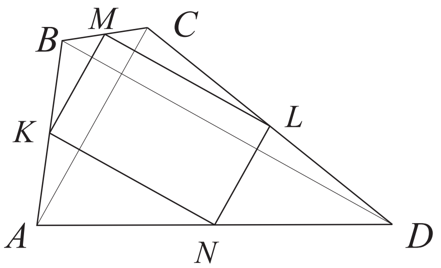
Таким образом, решением системы $(*)$ является множество таких $b$, что

$$b^3\in(-8;\,0) \quad\Leftrightarrow\quad b\in(-2;\,0).$$

**8.** $\boxed{\text{Ответ: 1 м.}}$

<u>Решение</u>. Пусть $K$ и $L$ — середины сторон соответственно $AB$ и $CD$, $MN$ — отрезок, соединяющий середины сторон $BC$ и $AD$.

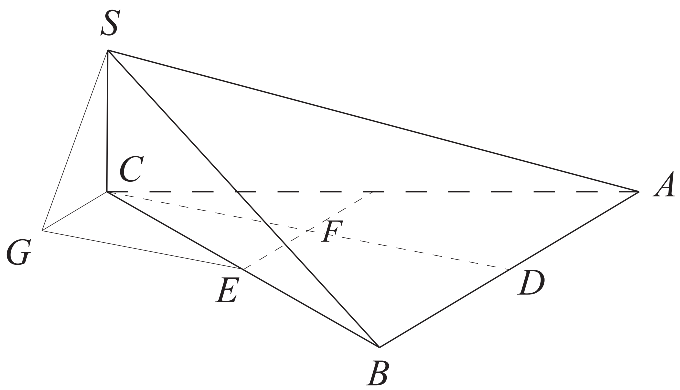
Четырехугольник $KMLN$ является параллелограммом, поскольку $KM$ параллельна $AC$ (как средняя линия треугольника $ABC$) и $NL$ параллельна $AC$, следовательно, $KM$ параллельна $NL$. Аналогично доказывется, что $ML \parallel KN$.




По условию $AC$ перпендикулярна $BD$, поэтому $KN$ перпендикулярна $NL$, т. е. четырехугольник $KMLN$ является прямоугольником. Поскольку в прямоугольнике диагонали равны, отсюда следует, что $MN = KL = 1$ м.

**9.** $\boxed{\text{Ответ: } \frac{\pi}{4};\ \frac{2}{\sqrt{3}}.}$

Решение.




Пусть $D$ и $E$ — середины ребер $AB$ и $BC$ соответственно, $F$ — середина отрезка $CD$. Угол между прямыми $SE$ и $CD$ равен углу $SEG$, где $G$ выбирается таким образом, что четырехугольник $FEGC$ — параллелограмм.

Имеем

$$EG = FC = \frac{CD}{2} = \sqrt{6}, \quad CG = FE = \frac{AB}{4} = \sqrt{2},$$

$$SG = \sqrt{CG^2 + CS^2} = \sqrt{6}, \quad SE = \sqrt{SC^2 + EC^2} = \sqrt{12}.$$

Таким образом, треугольник $SEG$ имеет стороны, равные $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{12}$, т. е. $\triangle SEG$ — равнобедренный прямоугольный треугольник, следовательно, $\angle SEG = \pi/4$.

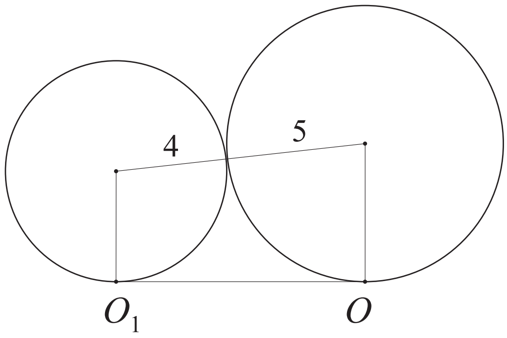
Расстояние между прямыми $SE$ и $CD$ равно расстоянию между прямой $CD$ и плоскостью $SEG$, т. е. высоте пирамиды $EGSC$, опущенной из вершины $C$. Эта высота равна высоте треугольника $CGS$, проведенной из вершины $C$, поскольку плоскость $CGS$ перпендикулярна плоскости $SEG$.

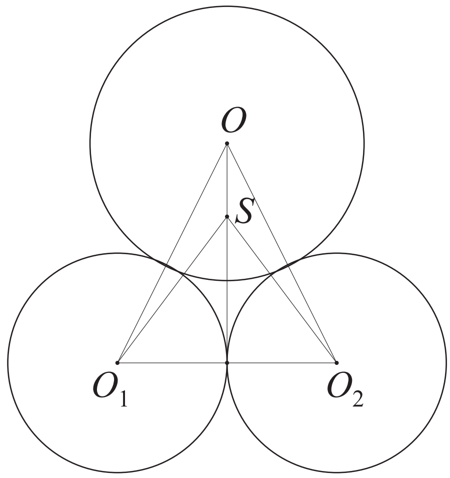
Треугольник $CGS$ — прямоугольный, поэтому искомая высота равна

$$\frac{CG \cdot CS}{GS} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

**10.** $\boxed{\text{Ответ: } 68/3.}$

Решение.




Пусть $S$, $O_1$, $O_2$ и $O$ — ортогональные проекции вершины конуса, центров сфер радиусов 4, 4 и 5 соответственно.

Имеем $O_1O_2 = 8$, $O_1O = O_2O = \sqrt{80}$.

Пусть $SO = x$, тогда

$$O_1S = \sqrt{16 + (8-x)^2} = \sqrt{x^2 - 16x + 80}.$$

Радиус основания конуса равен

$$x + \frac{5}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1/4)} = \sqrt{x^2 - 16x + 80} + \frac{4}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1/4)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 20 = \sqrt{x^2 - 16x + 80} + 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8/3,$$

поэтому искомый радиус равен

$$\frac{8}{3} + 20 = \frac{68}{3}.$$

## Вариант IV

1. Решить неравенство

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^y - 1} \geqslant \frac{2}{\left(\frac{1}{100}\right)^y - 10}.$$

2. Решить уравнение

$$|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}.$$

3. Длины основания, диагонали и боковой стороны трапеции, выходящих из вершины $C$, равны $a$. Длина диагонали $BD$ равна $b$. Найти боковую сторону $AD$ трапеции $ABCD$.

4. Решить неравенство
$$\log_4\left(\log_{\frac{1}{3}}|x|-1\right)\leqslant\frac{1}{2}.$$

5. Решить уравнение
$$3^{\frac{1}{2}+\log_3\cos x}+6^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}+\log_9\sin x}.$$

6. Решить уравнение
$$2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{8}\right)-2\cos\left(\frac{x}{6}-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{12}-\frac{\pi}{16}\right)+3\sin\left(\frac{x}{12}-\frac{\pi}{16}\right).$$

7. Найти все значения параметра $b$, для каждого из которых все корни уравнений
$$x^2-\frac{8x}{b}-2b=0\quad\text{и}\quad x^2-\frac{6x}{b}-b=0$$
различны и перемежаются, т.е. оба уравнения имеют два корня и между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны, а длины отрезков $EF$ и $FG$, соединяющих середины $E$, $F$ и $G$ соответственно отрезков $AB$, $BC$ и $CD$ равны 1 м. Найти длину отрезка $FH$, где $H$ — середина $AD$.

9. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник $ABC$ с прямым углом $C$, длины катетов которого равны $4\sqrt{2}$. Боковое ребро $SC$ перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку $S$ и середину ребра $BC$, а другая проходит через точку $C$ и середину ребра $AB$.

10. Три шара, среди которых имеются два одинаковых, касаются плоскости $\mathcal{P}$ и, кроме того, попарно касаются друг друга. Вершина прямого кругового конуса принадлежит плоскости $\mathcal{P}$, а ось конуса перпендикулярна этой плоскости. Все три шара лежат вне конуса, причем каждый из них касается некоторой образующей конуса. Найти косинус

угла между образующей конуса и плоскостью $\mathcal{P}$, если известно, что в треугольнике с вершинами в точках касания шаров с плоскостью один из углов равен $150^\circ$.

## *Ответы:*

**1.** $(-\infty;\, -\lg 4] \cup (1/2;\, 0)$;
**2.** $-\pi/6 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;
**3.** $\sqrt{4a^2 - b^2}$;
**4.** $(-1/3;\, -1/27] \cup [1/27;\, 1/3)$;
**5.** $5\pi/12 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;
**6.** $-5\pi/4 + 12\pi k,\ -\pi/12 + (-1)^{k+1}4\pi/3 + 4\pi n,\ k, n \in \mathbb{Z}$;
**7.** $-2 < b < 0$;
**8.** $\sqrt{2}$;
**9.** $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2},\ h = \sqrt{2}$;
**10.** $1/7$.

# Основной экзамен

## Вариант V

1. Корни $x_1$, $x_2$ уравнения $x^2 - 3x + A = 0$ и корни $x_3$, $x_4$ уравнения $x^2 - 12x + B = 0$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$. Найти $A$ и $B$.

2. Решить уравнение
$$\cos(x^2 + x - 6) - 2\sqrt{\cos 2\pi x - 1} = 1.$$

3. Решить неравенство
$$\sqrt{x + 1 - 2\sqrt{x}} \cdot \left(25^{1-x} + 9^{1-x} - 34 \cdot 15^{-x}\right) < 0.$$

4. В прямоугольном треугольнике разность длин гипотенузы и одного из катетов равна 1. Основание высоты этого треугольника, опущенной из вершины прямого угла, рассекает гипотенузу на два отрезка, меньший из которых равен 25/13. Найти стороны треугольника.

5. Решить неравенство
$$\sqrt{\log_2(4\cos x - \cos 2x - 1) - 1} + \sqrt{\log_2(1 - 4\sin x + \sin 2x) + 1} \leqslant 1.$$

6. Решить систему
$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 7 + \sqrt{x + y^2 - 7}} = x, \\ \sqrt{x^2 + 2 + \sqrt{y + x^2 + 2}} = y. \end{cases}$$

7. Решить уравнение
$$\cos 2x + \cos 4x = [\cos 4x],$$
где $[y]$ — наибольшее целое число, не превосходящее $y$.

8. Найти все значения $b$, для каждого из которых уравнение
$$\operatorname{arcctg}^2 x - (5b - 2)\operatorname{arcctg} x + 6b^2 - 3b - 3 = 0$$
имеет единственное решение. Для каждого найденного значения $b$ выписать решение.

9. Все стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ — натуральные числа. Периметры треугольников $ABC$, $BCD$, $CDA$, $DAB$ равны соответственно 12; 12,8; 12; 10,8. Найти периметр $ABCD$.

## *Решения*

**1.** $\boxed{\text{Ответ: } A = 2;\ B = 32.}$

Решение.

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{9-4A}}{2}, \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{9-4A}}{2},$$
$$x_3 = 6-\sqrt{36-B}, \quad x_4 = 6+\sqrt{36-B}.$$

$x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} > 1.$$

Имеем

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_4}{x_3} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3+\sqrt{9-4A}}{3-\sqrt{9-4A}} = \frac{6+\sqrt{36-B}}{6-\sqrt{36-B}} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad 18+6\sqrt{9-4A}-3\sqrt{36-B}-\sqrt{9-4A}\sqrt{36-B} =$$
$$= 18+3\sqrt{36-B}-6\sqrt{9-4A}-\sqrt{36-B}\sqrt{9-4A} \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{9-4A} = \sqrt{36-B} \quad\Rightarrow\quad B = 16A.$$

Далее,

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3+\sqrt{9-4A}}{3-\sqrt{9-4A}} = \frac{6-\sqrt{36-16A}}{3+\sqrt{9-4A}}\cdot 2 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad (3+\sqrt{9-4A})^2 = 4(3-\sqrt{9-4A})^2 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&3+\sqrt{9-4A} = 6-2\sqrt{9-4A},\\&3+\sqrt{9-4A} = 2\sqrt{9-4A}-6\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&\sqrt{9-4A} = 1,\\&\sqrt{9-4A} = 9\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&A = 2,\\&A = -14.\end{aligned}\right.$$

После проверки получим $A = 2$; $B = 32$.

**2.** $\boxed{\text{Ответ: } x = -3;\ 2.}$

Решение. Областью допустимых значений является множество тех $x$, которые удовлетворяют неравенству

$$\cos 2\pi x - 1 \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos 2\pi x = 1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x = n,\ n \in \mathbb{Z},$$

т. е. множество всех целых чисел.

Пусть $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда уравнение примет вид

$$\cos(n^2 + n - 6) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + n - 6 = 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что левая часть уравнения всегда есть целое число, а правая только при $m = 0$, тогда получим уравнение

$$n^2 + n - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &n = -3 \\ &n = 2. \end{aligned}\right.$$

**3.** $\boxed{\text{Ответ: } x \in (0;\ 1) \cup (1;\ 2).}$

<u>Решение</u>.

$$\sqrt{x + 1 - 2\sqrt{x}} \cdot \left(25^{1-x} + 9^{1-x} - 34 \cdot 15^{-x}\right) < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 1 - 2\sqrt{x} > 0, \\ 25^{1-x} + 9^{1-x} - 34 \cdot 15^{-x} < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

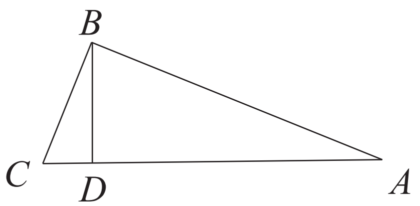
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\sqrt{x} - 1)^2 > 0, \\ 25 \cdot 5^{-2x} + 9 \cdot 3^{-2x} - 34 \cdot (3 \cdot 5)^{-x} < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty), \\ 25\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - 34\left(\frac{3}{5}\right)^{x} + 9 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty), \\ \frac{9}{25} < \left(\frac{3}{5}\right)^{x} < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty), \\ 0 < x < 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0;\ 1) \cup (1;\ 2).$$

**4.** $\boxed{\text{Ответ: } 5,\ 12,\ 13.}$

<u>Решение</u>.




Обозначим данный треугольник через $\triangle ABC$ с прямым углом $B$. Пусть $AC = x$ и $AB = x - 1$, тогда $BC = \sqrt{2x - 1}$. Высота $BD$ делит гипотенузу $AC$ на два отрезка: $AD$ и $DC$.

Рассмотрим два случая: 1) $AD = 25/13$ и 2) $DC = 25/13$.

1) $AD = 25/13$.

Треугольники $ABC$ и $ADB$ подобны, поэтому

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{25/13}{x-1} = \frac{x-1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = \frac{25x}{13} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{51+5\sqrt{77}}{26}, \\ x = \frac{51-5\sqrt{77}}{26}. \end{array}\right.$$

Если $x = \frac{51-5\sqrt{77}}{26}$, то $DC = AC - AD = \frac{1-5\sqrt{77}}{26} < 0$, чего не может быть; а если $x = \frac{51+5\sqrt{77}}{26}$, то $DC = \frac{1+5\sqrt{77}}{26} < \frac{25}{13}$, что противоречит условию задачи, следовательно этот случай невозможен.

2) $DC = 25/13$.

Аналогично,

$$AD \cdot AC = AB^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{25}{13}\right) x = (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 13,$$

тогда

$$DC = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13} > AD.$$

Итак, $AC = 13$, $AB = 12$, $BC = 5$.

**5.** $\boxed{\text{Ответ: } 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.}$

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} 4\cos x - 2\cos 2x - 1 > 0, \\ \log_2(4\cos x - \cos 2x - 1) \geqslant 1, \\ 1 - 4\sin x + \sin 2x > 0, \\ \log_2(1 - 4\sin x + \sin 2x) \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos x - \cos 2x - 1 > 0, \\ 4\cos x - \cos 2x - 1 \geqslant 2, \\ 1 - 4\sin x + \sin 2x > 0, \\ 1 - 4\sin x + \sin 2x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4\cos x - \cos 2x - 1 \geqslant 2, \\ 1 - 4\sin x + \sin 2x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\cos x - 1)^2 \leqslant 0, \\ \frac{1}{2} + 4\sin x + \sin 2x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} + 4\sin x + \sin 2x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Подставляя $x = 2\pi n$ в данное неравенство, получим

$$\sqrt{\log_2 2 - 1} + \sqrt{\log_2 1 + 1} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant 1,$$

т. е. вся область допустимых значений является решением.

**6.** $\boxed{\text{Ответ: } x = 2,\ y = 3.}$

Решение. Обозначим $f(x) = \sqrt{x + y^2 - 7}$, тогда первое уравнение системы можно переписать в виде

$$f(f(x)) = x.$$

Заметим, что функция $f(x)$ — монотонно возрастающая при $x \geqslant 7 - y^2$, поэтому уравнение $f(f(x)) = x$ эквивалентно уравнению $f(x) = x$, т. е.

$$\sqrt{x + y^2 - 7} = x.$$

Аналогично, второе уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{y + x^2 + 2} = y.$$

Имеем

$$\begin{cases} \sqrt{x + y^2 - 7} = x, \\ \sqrt{y + x^2 + 2} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y^2 - 7 = x^2, \\ y + x^2 + 2 = y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x - 7, \\ x^2 - y^2 = -y - 2 \end{cases} \Rightarrow \quad y = 5 - x.$$

Подставляя полученное равенство в уравнение

$$\sqrt{x + y^2 - 7} = x,$$

получим

$$\sqrt{x^2 - 9x + 18} = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 9x + 18 = x^2, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 3.$$

Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ и $y = 3$ действительно являются решением системы.

**7.** Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k,\ \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$

Решение. Заметим, что

$$[\cos 4x] = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 \leqslant \cos 4x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant \cos 4x < 1, \\ 1, & \text{если } \cos 4x = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим 3 случая:

1) $-1 \leqslant \cos 4x < 0$. В этом случае уравнение имеет следующий вид:

$$\cos 2x + \cos 4x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 2x + \cos 2x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos 2x(2\cos 2x+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned}&\cos 2x=0,\\&\cos 2x=-1/2\end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned}&x=\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\\&x=\pm\tfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{aligned}\right.$$

Проверкой легко убеждаемся, что полученные корни удовлетворяют условию $-1\leqslant\cos 4x<0$.

2) $0\leqslant\cos 4x<1$. В этом случае имеем уравнение

$$\cos 2x+\cos 4x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 2x+\cos 2x=1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned}&\cos 2x=-1,\\&\cos 2x=\tfrac{1}{2}.\end{aligned}\right.$$

Следовательно, учитывая, что $\cos 4x=2\cos^2 2x-1$, получим

$$\left[\begin{aligned}&\cos 4x=1,\\&\cos 4x=-\tfrac{1}{2}.\end{aligned}\right.$$

Поэтому в этом случае решений нет.

3) $\cos 4x=1$. Подставляя $x=\pi n/2$ в уравнение $\cos 2x+\cos 4x=[\cos 4x]$, получим

$$(-1)^n+1=1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned}&0=1,\\&2=1.\end{aligned}\right.$$

Следовательно, решений нет.

**8.** $\boxed{\text{Ответ: } \left(-\dfrac{1}{2};\,1\right]\cup\left[\dfrac{\pi-1}{2};\,\dfrac{\pi}{3}+1\right).}$

Решение. После замены $t=\operatorname{arcctg}x$ получим уравнение

$$t^2-(5b-2)t+6b^2-3b-3=0, \tag{$*$}$$

решением которого являются $2b+1$ и $3b-3$.

Рассмотрим сначала случай $2b+1=3b-3 \Leftrightarrow b=4$. Тогда $t=9$ является единственным корнем уравнения $(*)$, однако, уравнение $\operatorname{arcctg}=9$ не имеет решений.

Все значения параметра $b$, при которых исходное уравнение имеет, по крайней мере, одно решение, вычисляется из совокупности

$$\left[\begin{aligned}&0<2b+1<\pi,\\&0<3b-3<\pi\end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned}&-1<2b<\pi-1,\\&3<3b<\pi+3\end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2} < b < \tfrac{\pi-1}{2}, \\ &1 < b < \tfrac{\pi}{3}+1 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\frac{1}{2};\, \frac{\pi}{3}+1\right).$$

Теперь найдем все значения параметра $b$, при которых данное уравнение имеет ровно два решения:

$$\begin{cases} 0 < 2b+1 < \pi, \\ 0 < 3b-3 < \pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\tfrac{1}{2} < b < \tfrac{\pi-1}{2}, \\ 1 < b < \tfrac{\pi}{3}+1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad b \in \left(1;\, \frac{\pi-1}{2}\right).$$

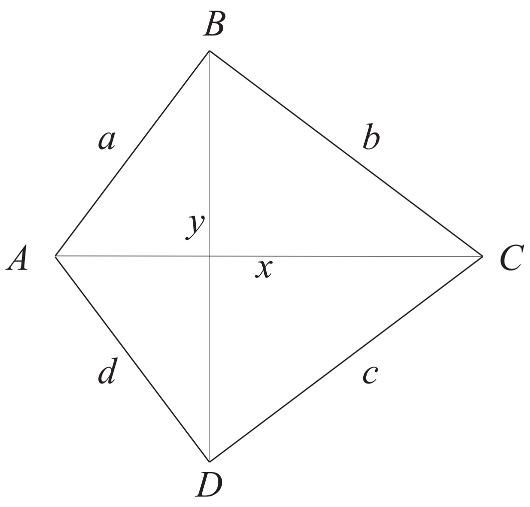
Отсюда следует, что разность множеств $(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}+1)$ и $(1; \frac{\pi-1}{2})$, равный

$$\left(-\frac{1}{2};\, 1\right] \cup \left[\frac{\pi-1}{2};\, \frac{\pi}{3}+1\right)$$

является множеством искомых значений $b$.

**9.** $\boxed{\text{Ответ: } 14.}$

<u>Решение</u>.




Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = x$, $BD = y$, тогда

$$\begin{cases} a+b+x = 12, \\ b+c+y = 12,8 \\ c+d+x = 12, \\ d+a+y = 10,8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c = a+1, \\ b = d+1, \\ x = y+0,2, \end{cases}$$

отсюда и из неравенства треугольника имеем

$$x \leqslant 5; \quad y \leqslant 4,8;$$

$$2 \leqslant a,\ d \leqslant 4; \quad 3 \leqslant b,\ c \leqslant 5.$$

Покажем, что $x = 5$ и $y = 4,8$. Допустим, что $x \neq 5 \;\Rightarrow\; x < 5 \;\Rightarrow\; x \leqslant 4$, тогда $a+b \geqslant 8$ и $c+d \geqslant 8$, откуда следует, что углы $\angle B$ и $\angle D$ острые. Кроме того, $y \leqslant 3,8$, следовательно, $b+c \geqslant 9$ и $d+a \geqslant 7$, поэтому углы $\angle A$ и $\angle C$ также острые. Таким образом, мы получили, что в четырехугольнике все углы являются острыми, что невозможно. Итак, $x = 5$, $y = 4,8$, поэтому

$$a+b+c+d = 14.$$

# Вариант VI

1. Корни $x_1$, $x_2$ уравнения $x^2 - 5x + A = 0$ и корни $x_3$, $x_4$ уравнения $x^2 - 9x + B = 0$ образуют арифметическую прогрессию $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$. Найти $A$ и $B$.

2. Решить уравнение
$$\cos\left(x^2 - 4x - 21\right) - 3\sqrt{\cos 4\pi x - 1} = 1.$$

3. Решить неравенство
$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \cdot \left(25^{2-x} + 9^{2-x} - 34 \cdot 15^{1-x}\right) < 0.$$

4. В прямоугольном треугольнике разность длин гипотенузы и одного из катетов равна 1. Меньший из отрезков гипотенузы, отсекаемый основанием высоты, опущенной из вершины прямого угла равен $1,8$. Найти стороны треугольника.

5. Решить неравенство
$$\sqrt{\log_2\left(\cos 2x - 4\sin x - 1\right) - 1} + \sqrt{\log_2\left(1 + 4\cos x - \sin 2x\right) + 1} \leqslant 1.$$

6. Решить систему
$$\begin{cases} \sqrt{y^2 + 1 + \sqrt{x + y^2 + 1}} = x, \\ \sqrt{x^2 - 4 + \sqrt{y + x^2 - 4}} = y. \end{cases}$$

7. Решить уравнение
$$\cos 4x - \cos 2x = [\cos 4x],$$
где $[y]$ — наибольшее целое число, не превосходящее $y$.

8. Найти все значения $a$, для каждого из которых уравнение
$$\operatorname{arcctg}^2 x - (5a+3)\operatorname{arcctg} x + 6a^2 + 9a = 0$$
имеет единственное решение. Для каждого найденного значения $a$ выписать решение.

9. Все стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ — натуральные числа. Периметры треугольников $ABC$, $BCD$, $CDA$, $DAB$ равны соответственно 18; 16; 18; 16. Найти периметр $ABCD$.

## *Ответы:*

**1.** $A = 6$, $B = 20$;
**2.** $\{-3,\ 7\}$;
**3.** $(1;\ 2) \cup (2;\ 3)$;
**4.** 3, 4, 5;
**5.** $-\pi/2 + 2\pi k$;
**6.** $(2;\ 1)$;
**7.** $\pi/4 + \pi n/2$, $\pm\pi/6 + \pi k$, $n,\ k \in \mathbb{Z}$;
**8.** $(-3/2;\ 0] \cup [(\pi - 3)/2;\ \pi/3)$,

$$x = \begin{cases} \mathrm{ctg}(2a+3), & \text{при } a \in \left(-\frac{3}{2};\ 0\right], \\ \mathrm{ctg}(3a), & \text{при } a \in \left[\frac{\pi-3}{2};\ \frac{\pi}{3}\right), \end{cases};$$

**9.** 20.

# Олимпиада «Абитуриент — 2003» (март)

## Вариант I

1. Решить неравенство $6 \cdot 4^x + 10^{x+1} - 4 \cdot 25^x \leqslant 0$.

2. Решить уравнение $4\sqrt{x+5} = 7 - 3|x+3|$.

3. Решить неравенство $\sqrt{10x^2 - 50x + 60} \leqslant 3x - 6$.

4. Пункты $A$, $B$, $C$ и $D$ расположены в указанном порядке вдоль шоссе. Автомобиль и мотоцикл выехали одновременно навстречу друг другу соответственно из пунктов $A$ и $C$. Через 1 час они встретились в пункте $B$. Если бы автомобиль и мотоцикл выехали одновременно в сторону пункта $D$, то автомобиль догнал бы мотоцикл в пункте $D$ через 5 часов. Найти расстояние между пунктами $B$ и $D$, если расстояние от $A$ до $C$ равно 125км.

5. Решить неравенство $\log_{x+2}(2x^2 + x) \leqslant 2$.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом $60°$, а их длины относятся как $1 : 3$. Чему равна меньшая диагональ четырехугольника $ABCD$, если большая равна $\sqrt{39}$?

7. Решить уравнение $\log_2(\cos 2x) + \log_{\frac{1}{2}}(\cos x - \sin x) = 0$.

8. При каждом значении параметра $a$ решить неравенство
$$|x| \geqslant a(x^2 - 4) + 2.$$

9. Две окружности, радиусы которых относятся как $7 : 5$, пересекаются в точках $P$ и $Q$. Точки $A$ и $B$ лежат на первой окружности, точки $C$ и $D$ — на второй, причем отрезок $AD$ содержит точку $Q$, а отрезок $BC$ содержит точку $P$. Найти $AP$, если $AD = \sqrt{37}$, а точка $Q$ равноудалена от прямых $AB$, $BC$ и $CD$.

10. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро $AB$ перпендикулярно ребру $SC$, а ребро $SA$ перпендикулярно ребру $BC$. Найти $SA$, если $AB = 2$, $BC = 1$ и $SC = 3$.

## *Решения*

**1.** $\boxed{\text{Ответ: } [\log_{2/5}(1/3);\ +\infty).}$

Решение. Разделим на $25^x$ и произведем замену $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$:

$$6t^2 + 10t - 4 \leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3(t+2)(t-1/3) \leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad -2 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{2}{5}\right)^x \leqslant \frac{1}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x \geqslant \log_{2/5}\frac{1}{3}.$$

**2.** $\boxed{\text{Ответ: } -4;\ -\dfrac{44}{9};\ \dfrac{2-4\sqrt{43}}{9}.}$

Решение.

$$4\sqrt{x+5} = 7 - 3|x+3| \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} 3(x+3) = 7 - 4\sqrt{x+5}, \\ 3(x+3) = 4\sqrt{x+5} - 7 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} 4\sqrt{x+5} = -3x - 2, \\ 4\sqrt{x+5} = 3x + 16 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 16(x+5) = 9x^2 + 12x + 4, \\ -3x - 2 \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 16(x+5) = 9x^2 + 96x + 256, \\ 3x + 16 \geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9x^2 - 4x - 76 = 0, \\ x \leqslant -2/3, \end{cases} \\ \begin{cases} 9x^2 + 80x + 176 = 0, \\ x \geqslant -16/3, \end{cases} \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{2\pm4\sqrt{43}}{9}, \\ x \leqslant -2/3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -44/9;\ -4, \\ x \geqslant -16/3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Следовательно, $x = -4;\ -44/9;\ 2/9 - 4\sqrt{43}/9$.

**3.** $\boxed{\text{Ответ: } \{2\} \cup [3;\ 12].}$

Решение. $\sqrt{10x^2 - 50x + 60} \leqslant 3x - 6 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{10}\sqrt{(x-2)(x-3)} \leqslant 3(x-2)$. Рассмотрим два случая.

1) $x = 2$. Легко видеть, что $x = 2$ удовлетворяет неравенству.

2) $x > 2$. Разделив на $\sqrt{x-2} > 0$, получим

$$\sqrt{10}\sqrt{x-3} \leqslant 3\sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 10(x-3) \leqslant 9\,(x-2)\,, \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \leqslant 12, \\ x \geqslant 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [3;\, 12].$$

**4.** $\boxed{\text{Ответ: } 300.}$

Решение. Пусть $v$ — скорость автомобиля, а $w$ — скорость мотоцикла. Их встречу через час в пункте $B$ можно записать в виде $v + w = 125$. А то, что автомобиль догонит мотоцикл в пункте $D$ через 5 часов выразим уравнением $5v - 5w = 125$. Получим систему

$$\begin{cases} v + w = 125, \\ 5v - 5w = 125, \end{cases}$$

решением которой является $v = 75$ и $w = 50$. Отсюда

$$|BD| = |AD| - |AB| = 5 \cdot v - 1 \cdot v = 4v = 300.$$

**5.** $\boxed{\text{Ответ: } x \in (-2;\, -1) \cup (-1;\, -1/2) \cup (0;\, 4].}$

Решение.

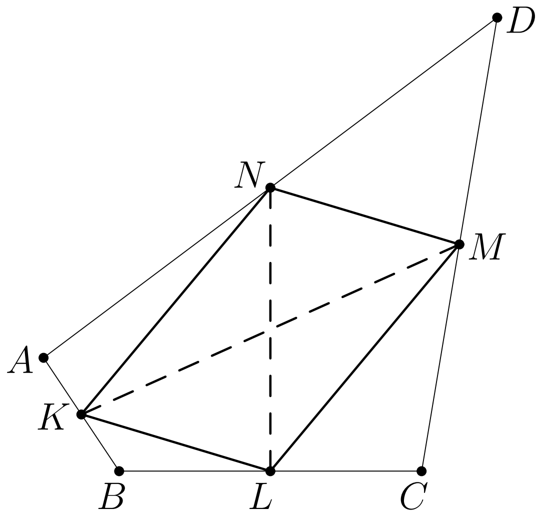
$$\log_{x+2}(2x^2 + x) \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2 > 1, \\ 2x^2 + x > 0, \\ 2x^2 + x \leqslant (x+2)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x + 2 < 1, \\ 2x^2 + x \geqslant (x+2)^2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1, \\ x(2x+1) > 0, \\ (x-4)(x+1) \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x < -1, \\ (x-4)(x+1) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1, \\ x \in (-\infty;\, -1/2) \cup (0;\, \infty), \\ -1 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x < -1, \\ x \in (-\infty;\, -1] \cup [4;\, \infty) \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \in (-1;\, -1/2) \cup (0;\, 4], \\ x \in (-2;\, -1) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-2;\, -1) \cup (-1;\, -1/2) \cup (0;\, 4]$$

**6.** $\boxed{\text{Ответ: } \sqrt{21}.}$

Решение.




Пусть $K$, $L$, $M$ и $N$ — середины сторон четырехугольника (см. рис.). Тогда $KLMN$ — параллелограмм и

$$|AC| = 2|KL| = 2|MN|, \qquad |BD| = 2|LM| = 2|NK|.$$

Поэтому достаточно найти длины сторон параллелограмма. Пусть $x$ и $3x$ — длины диагоналей параллелограмма $KLMN$. Тогда его стороны находятся по теореме косинусов:

$$\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\cos 120^\circ} = \frac{\sqrt{13}}{2}x \quad \text{(бóльшая сторона)},$$

$$\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{2}x \quad \text{(меньшая сторона)}.$$

По условию $\sqrt{39} = \sqrt{13}x$, откуда $x = \sqrt{3}$, следовательно меньшая диагональ четырехугольника $ABCD$ равна $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{21}$.

**7.** $\boxed{\text{Ответ: } 2\pi n \ (n \in \mathbb{Z}).}$

Решение.

$$\log_2(\cos 2x) + \log_{1/2}(\cos x - \sin x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_2(\cos 2x) - \log_2(\cos x - \sin x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = 1, \\ \cos 2x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = 1, \\ \cos 2x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\cos x+\sin x=1,\\ \cos x-\sin x\neq 0,\\ \cos 2x>0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\sin(x+\pi/4)=\sqrt{2}/2,\\ \cos x\neq \sin x,\\ \cos 2x>0\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\end{array}\right.\\ \cos x\neq\sin x,\\ \cos 2x>0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

**8.** Ответ: $\begin{cases}(-\infty;\,-2]\cup[2;\,\infty) & \text{при } a\leqslant 0;\\ \left[2-\frac{1}{a};\,-2\right]\cup\left[2;\,\frac{1}{a}-2\right] & \text{при } 0<a<\frac{1}{4};\\ \{-2;\,2\} & \text{при } a=\frac{1}{4};\\ \left[-2;\,2-\frac{1}{a}\right]\cup\left[\frac{1}{a}-2;\,2\right] & \text{при } \frac{1}{4}<a<\frac{1}{2};\\ [-2;\,2] & \text{при } a\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$

Решение. Сделаем замену $|x|=t$. Тогда исходное неравенство эквивалентно

$$t\geqslant a(t^2-4)+2\quad\Leftrightarrow\quad at^2-t+2-4a\leqslant 0.$$

Рассмотрим несколько случаев.

1) $a=0$. Тогда получим

$$t\geqslant 2\quad\Leftrightarrow\quad |x|\geqslant 2\quad\Leftrightarrow\quad x\in(-\infty;\,-2]\cup[2;\,\infty).$$

2) $a>0$. Корнями уравнения $at^2-t+2-4a=0$ являются числа

$$t_1=2\quad\text{и}\quad t_2=\frac{1}{a}-2,$$

поэтому решением неравенства будет отрезок $[t_1;\,t_2]$, если $t_1\leqslant t_2$ и $[t_2;\,t_1]$ в противном случае.

Далее, $t_1\leqslant t_2\quad\Leftrightarrow\quad 0<a\leqslant 1/4$, причем $t_1=t_2$ при $a=1/4$. Таким образом, если $0<a<1/4$, то

$$t\in[t_1;\,t_2]\quad\Leftrightarrow\quad 2\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{a}-2\quad\Leftrightarrow\quad x\in\left[2-\frac{1}{a};\,-2\right]\cup\left[2;\,\frac{1}{a}-2\right],$$

при $a=1/4$

$$t=t_1=t_2\quad\Leftrightarrow\quad |x|=2\quad\Leftrightarrow\quad x=\pm 2,$$

а если $a > 1/4$, то

$$t \in [t_2;\, t_1] \;\;\Leftrightarrow\;\; \frac{1}{a} - 2 \leqslant |x| \leqslant 2.$$

Здесь рассмотрим два случая. Если $a < 1/2$, то $1/a - 2 > 0$, поэтому

$$\frac{1}{a} - 2 \leqslant |x| \leqslant 2 \;\;\Leftrightarrow\;\; x \in \left[-2;\, 2 - \frac{1}{a}\right] \cup \left[\frac{1}{a} - 2;\, 2\right].$$

Если $a \geqslant 1/2$, то $1/a - 2 \leqslant 0$, следовательно,

$$\frac{1}{a} - 2 \leqslant |x| \leqslant 2 \;\;\Leftrightarrow\;\; |x| \leqslant 2 \;\;\Leftrightarrow\;\; x \in [-2;\, 2].$$

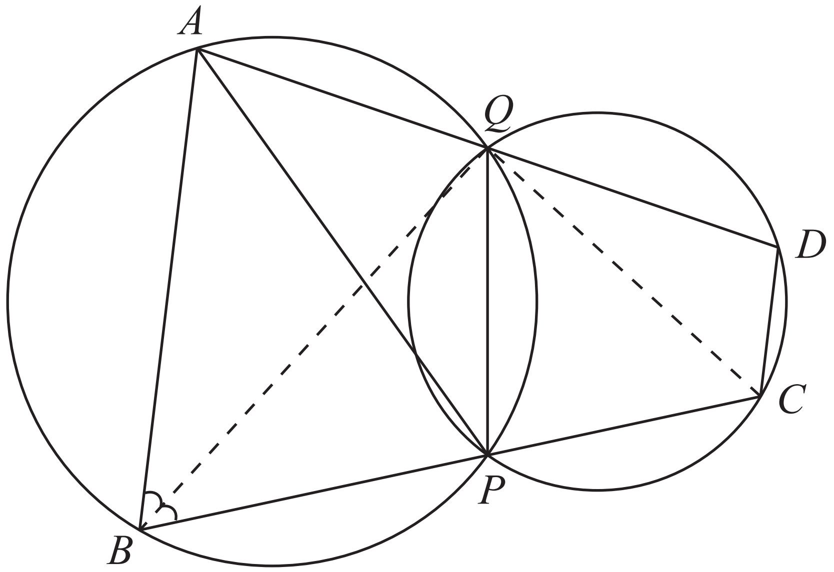
3) $a < 0$. В этом случае $t_2 < t_1$, $t_2 < 0$ и решением неравенства будет множество

$$t \in (-\infty;\, t_2] \cup [t_1;\, \infty) \;\;\Leftrightarrow\;\; \left[\begin{array}{l} |x| \leqslant 1/a - 2 < 0, \\ |x| \geqslant 2 \end{array}\right. \;\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;\; |x| \geqslant 2 \;\;\Leftrightarrow\;\; x \in (-\infty;\, -2] \cup [2;\, \infty).$$

**9.** $\boxed{\text{Ответ: } 7/\sqrt{2}.}$

Решение.




Поскольку точка $Q$ равноудалена от прямых $AB$ и $BC$, то $BQ$ — биссектриса угла $ABP$, т. е. $\angle ABQ = \angle QBP$, откуда следует, что $AQ = PQ$, как хорды, опирающиеся на равные углы. Аналогично, $QD = PQ$.

Обозначим через $7R$ и $5R$ радиусы окружностей. Пусть $\alpha = \angle PBQ$ и $\beta = \angle PCQ$, тогда хорда $PQ$ вычисляется по формуле

$$PQ = 2 \cdot 7R \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 5R \cdot \sin\beta \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{5}{7}.$$

С другой стороны $\angle AQP = \pi - \angle ABP = \pi - 2\alpha$, аналогично, $\angle DQP = \pi - 2\beta$, а поскольку $Q$ лежит на прямой $AD$, получим, что

$$\pi = \angle AQP + \angle DQP = 2\pi - 2(\alpha+\beta) \quad\Rightarrow\quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{5}{7} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

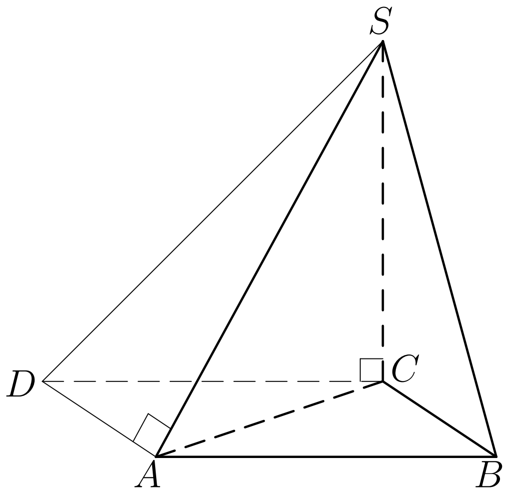
Треугольник $AQP$ — равнобедренный, с боковыми сторонами $AQ = QP = \frac{\sqrt{37}}{2}$ и углом $\angle AQP = \pi - 2\alpha$ при вершине.

Тогда

$$AP = 2 \cdot PQ \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{37}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{7}{\sqrt{2}}.$$

**10.** $\boxed{\text{Ответ: } 2\sqrt{3}.}$

Решение.




Достроим треугольник $ABC$ до параллелограмма $ABCD$ (см. рис.) По теореме Пифагора

$$SD^2 = SC^2 + CD^2 = SC^2 + AB^2 = 9 + 4 = 13,$$

и

$$SA^2 = SD^2 - AD^2 = SD^2 - BC^2 = 13 - 1 = 12,$$

следовательно, $SA = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

# Вариант II

1. Решить неравенство $3 \cdot 4^x + 4 \cdot 14^x - 4 \cdot 49^x \leqslant 0$.

2. Решить уравнение $4\sqrt{4-x} = 7 - 3|x-2|$.

3. Решить неравенство $\sqrt{5x^2 - 40x + 75} \leqslant 2x - 6$.

4. Пункты $A$, $B$, $C$ и $D$ расположены в указанном порядке вдоль шоссе. Легковой автомобиль и грузовик выехали одновременно навстречу друг другу соответственно из пунктов $D$ и $B$. Через 1 час они встретились в пункте $C$. Если бы легковой автомобиль и грузовик выехали одновременно в сторону пункта $A$, то легковой автомобиль догнал бы грузовик в пункте $A$ через 7 часов. Найти расстояние между пунктами $A$ и $C$, если расстояние от $B$ до $D$ равно 140км.

5. Решить неравенство $\log_{x+1}(2x^2 - 3x + 1) \leqslant 2$.

6. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали $AC$ и $BD$ относятся как $1 : 4$, а угол между ними равен $60°$. Чему равен больший из отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, если меньший равен $\sqrt{26}$?

7. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(\cos 2x) + \log_3(\cos x + \sin x) = 0$.

8. При каждом значении параметра $a$ решить неравенство
$$|x| \geqslant a(x^2 - 9) + 3.$$

9. Две окружности, радиусы которых относятся как $5 : 3$, пересекаются в точках $P$ и $Q$. Точки $A$ и $B$ лежат на первой окружности, точки $C$ и $D$ — на второй, причем отрезок $AD$ содержит точку $Q$, а отрезок $BC$ содержит точку $P$. Найти $AP$, если $AD = \sqrt{34}$, а точка $Q$ равноудалена от прямых $AB$, $BC$ и $CD$.

10. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро $AB$ перпендикулярно ребру $SC$, а ребро $SA$ перпендикулярно ребру $BC$. Найти $SC$, если $AB = 3$, $BC = 4$ и $SA = 1$.

## *Ответы:*

**1.** $[\log_{2/7}(2/3), \infty)$;
**2.** $3$, $35/9$, $(-11 + 4\sqrt{43})/9$;

**3.** $\{3\} \cup [5, 13]$;
**4.** $480$;
**5.** $(-1, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (1, 5]$;
**6.** $\sqrt{42}$;
**7.** $2\pi n$;
**8.** $|x| \geqslant 3$ при $a \leqslant 0$, $|x| \in [3, 1/a - 3]$ при $0 \leqslant a \leqslant 1/6$, $|x| \in [1/a - 3, 3]$ при $1/6 < a < 1/3$; $|x| \leqslant 3$ при $a \geqslant 1/3$;
**9.** $5$;
**10.** $2\sqrt{2}$.

# Олимпиада
# «Абитуриент — 2003» (май)

## Вариант III

1. Решить неравенство
$$|2x-5|+\sqrt{2x+1}\leqslant 6.$$

2. Годовой доход $\alpha$–банка составляет 35%, а $\beta$–банка — 25%. В этих банках размещена некоторая сумма, которая через год увеличилась на 25,5%. В каком соотношении были размещены денежные суммы в эти банки?

3. Решить неравенство $2^{x^2}\cdot 3^x<6$.

4. Решить уравнение
$$\sqrt{\sin 2x+2\sin x}=\operatorname{tg} x\cdot\sqrt{\sin 2x}.$$

5. В знакочередующейся геометрической прогрессии с первым отрицательным членом каждый член, начиная со второго, равен разности соседних членов. Найти знаменатель прогрессии.

6. Прямая касается окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника $KLM$, в точке $L$ и пересекает продолжение гипотенузы $KM$ за вершину $M$ в точке, удаленной от $M$ на расстояние 3. В каком отношении высота прямого угла делит гипотенузу, если $KM=7$?

7. Решить неравенство
$$\frac{|2\log_{\frac{2}{3}}x+3|}{\log_{\frac{2}{3}}8x^2-\log_{\frac{2}{3}}27}\leqslant 2|\log_{\frac{2}{3}}x+3|.$$

8. Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых графики функций $y=2ax+1$ и $y=(a-6)x^2-2$ не пересекаются.

9. Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2+x+2}\cdot\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-1)\leqslant[-x^2+x+2].$$

(Примечание: символом $[x]$ обозначается целая часть числа $x$.)

10. Найти максимально возможный объем треугольной пирамиды при условии, что две ее грани — равные треугольники со сторонами 5, 6 и 7.

## *Решения*

**1.** $\boxed{\text{Ответ: } \{-1/2\}\cup[0;\,4].}$

Решение. Сделаем замену $t=2x+1$, тогда

$$|t-6|+\sqrt{t}\leqslant 6 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\geqslant 6,\\ t+\sqrt{t}\leqslant 12,\end{cases}\\ \begin{cases}t<6,\\ \sqrt{t}-t\leqslant 0,\end{cases}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}6\leqslant t\leqslant 12,\\ t\leqslant(12-t)^2,\end{cases}\\ \begin{cases}0\leqslant t<6,\\ t\leqslant t^2,\end{cases}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}6\leqslant t\leqslant 12,\\ (t-16)(t-9)\geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}0\leqslant t<6,\\ t(t-1)\geqslant 0,\end{cases}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\in[6;\,12],\\ t\in(-\infty;\,9]\cup[16;\,\infty),\end{cases}\\ \begin{cases}t\in[0;\,6),\\ t\in(-\infty;\,0]\cup[1;\,\infty),\end{cases}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}t\in[6;\,9],\\ t\in\{0\}\cup[1;\,6)\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad t\in\{0\}\cup[1;\,9].$$

Теперь подставляя $t=2x+1$, получим ответ.

**2.** $\boxed{\text{Ответ: } 1:19.}$

Решение. Пусть в $\alpha$-банке размещена сумма $t$, а в $\beta$-банке — $kt$. Через год $\alpha$-банке вклад увеличится до $1,35t$, а в $\beta$-банке — до $1,25kt$, в сумме они составят $1,255(t+kt)$, т. е.

$$1,35t+1,25kt=1,255(t+kt).$$

Сокращая на $t$ и решая получившееся уравнение относительно $k$, получим $k=19$.

**3.** $\boxed{\text{Ответ: } \left(\log_2 \frac{1}{6};\ 1\right).}$

Решение.

$$2^{x^2} \cdot 3^x < 6 \quad\Leftrightarrow\quad 2^{x^2-1} \cdot 3^{x-1} < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \left(2^{x+1} \cdot 3\right)^{x-1} < 1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} 3 \cdot 2^{x+1} < 1, \\ x - 1 > 0, \end{cases} \\ &\begin{cases} 3 \cdot 2^{x+1} > 1, \\ x - 1 < 0, \end{cases} \end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x + 1 < \log_2 \frac{1}{3}, \\ x > 1, \end{cases} \\ &\begin{cases} x + 1 > \log_2 \frac{1}{3}, \\ x < 1, \end{cases} \end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x < \log_2 \frac{1}{6}, \\ x > 1, \end{cases} \\ &\begin{cases} x > \log_2 \frac{1}{6}, \\ x < 1 \end{cases} \end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} &x \in \varnothing \\ &x \in \left(\log_2 \tfrac{1}{6};\ 1\right) \end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad x \in \left(\log_2 \frac{1}{6};\ 1\right)$$

**4.** $\boxed{\text{Ответ: } \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \pi n;\ k, n \in \mathbb{Z}.}$

Решение.

$$\sqrt{\sin 2x + 2\sin x} = \operatorname{tg} x \sqrt{\sin 2x} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \sin 2x + 2\sin x = \operatorname{tg}^2 x \sin 2x, \\ \sin 2x \geqslant 0, \\ \operatorname{tg} x \geqslant 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\sin x\cos x + 2\sin x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot 2\sin x\cos x, \\ \sin 2x \geqslant 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x \left(\cos x + 1 - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) = 0, \\ \sin 2x \geqslant 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &\sin x = 0, \\ &\cos^2 x + \cos x - \sin^2 x = 0, \end{aligned}\right. \\ \cos x \neq 0, \\ \sin 2x \geqslant 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &\sin x = 0, \\ &2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \end{aligned}\right. \\ \cos x \neq 0, \\ \sin 2x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &\sin x = 0, \\ &\cos x = -1, \\ &\cos x = \tfrac{1}{2}, \end{aligned}\right. \\ \sin 2x \geqslant 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ &x = \pi + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \\ &x = \pm\tfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \end{aligned}\right. \\ \sin 2x \geqslant 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

**5.** $\boxed{\text{Ответ: } \dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}.}$

Решение. Обозначим $n$-ый член прогрессии через $b_n$ и знаменатель — через $q$, тогда при любых $n \geqslant 2$ имеем

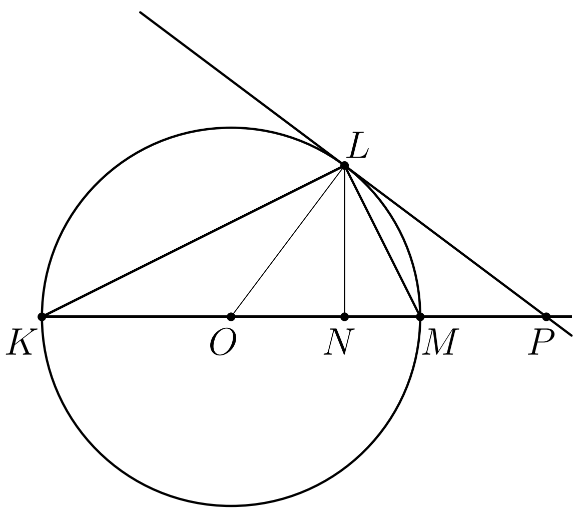
$$\left[\begin{array}{l} b_n = b_{n+1} - b_{n-1}, \\ b_n = b_{n-1} - b_{n+1} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} b_1q^{n-1} = b_1q^n - b_1q^{n-2}, \\ b_1q^{n-1} = b_1q^{n-2} - b_1q^n \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} q^2 - q - 1 = 0, \\ q^2 + q - 1 = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} q = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \\ q = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Поскольку прогрессия является знакочередующейся, то ее знаменатель отрицателен, следовательно, выбирая из полученных четырех значений те, которые удовлетворяют неравенству $q < 0$, получим ответ.

**6.** $\boxed{\text{Ответ: } 10 : 3.}$

Решение.




Опустим из вершины $L$ треугольника $KLM$ высоту $LN$. Вычисляя косинус угла $LON$ в прямоугольных треугольниках $LON$ и $LOP$, получим

$$\frac{ON}{OL} = \frac{OL}{OP} \quad \Rightarrow \quad ON = \frac{OL^2}{OP} = \frac{3,5^2}{3+3,5} = \frac{49}{26}.$$

Тогда

$$\frac{KN}{NM} = \frac{3,5 + \frac{49}{26}}{3,5 - \frac{49}{26}} = \frac{10}{3}.$$

**7.** $\boxed{\text{Ответ: } \left(0;\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{3/2}\right) \cup \left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3/2};\ +\infty\right).}$

Решение. Учитывая, что $x > 0$, преобразуем знаменатель дроби:

$$\log_{\frac{2}{3}} 8x^2 - \log_{\frac{2}{3}} 27 = 2\log_{\frac{2}{3}} x + 3.$$

Сделаем замену $\log_{\frac{2}{3}} x = t$, тогда

$$\frac{|2t+3|}{2t+3} \leqslant 2|t+3| \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t > -\frac{3}{2}, \\ 2|t+3| \geqslant 1, \end{cases} \\ \begin{cases} t < -\frac{3}{2}, \\ 2|t+3| \geqslant -1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \in \left(-\frac{3}{2};\ \infty\right), \\ t \in \left(-\infty;\ -\frac{7}{2}\right] \cup \left[-\frac{5}{2};\ \infty\right), \end{cases} \\ t \in \left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t > -\frac{3}{2}, \\ t < -\frac{3}{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_{\frac{2}{3}} x \neq -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left(0;\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}};\ \infty\right).$$

**8.** $\boxed{\text{Ответ: } (-6;\ 3).}$

Решение. Графики заданных функций не пересекаются только в том случае, когда не имеет решений система

$$\begin{cases} y = 2ax + 1, \\ y = (a-6)x^2 - 2, \end{cases}$$

а последнее выполняется только, если не имеет корней уравнение

$$(a-6)x^2 - 2ax - 3 = 0.$$

Если $a = 6$, то получим уравнение $12x + 3 = 0$, имеющее решение.

Если $a \neq 6$, то квадратное уравнение $(a-6)^2 - 2ax - 3 = 0$ не имеет корней, если дискриминант отрицателен:

$$4a^2 + 12(a-6) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(a+6)(a-3) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-6;\ 3).$$

**9.** $\boxed{\text{Ответ: } -1;\ 2.}$

<u>Решение</u>. Сделаем замену $t = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, тогда исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\sqrt{\frac{9}{4} - t} \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(t - \frac{5}{4}\right) \leqslant \left[\frac{9}{4} - t\right],\ t \geqslant 0.$$

Областью определения последнего неравенства является множество

$$\frac{5}{4} < t \leqslant \frac{9}{4}.$$

Тогда

$$0 \leqslant \frac{9}{4} - t < 1 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{9}{4} - t\right] = 0,$$

поэтому исходное неравенство можно переписать в виде

$$\sqrt{\frac{9}{4} - t} \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(t - \frac{5}{4}\right) \leqslant 0.$$

Заметим, что $0 < t - \frac{5}{4} \leqslant 1$, тогда

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(t - \frac{5}{4}\right) \geqslant 0.$$

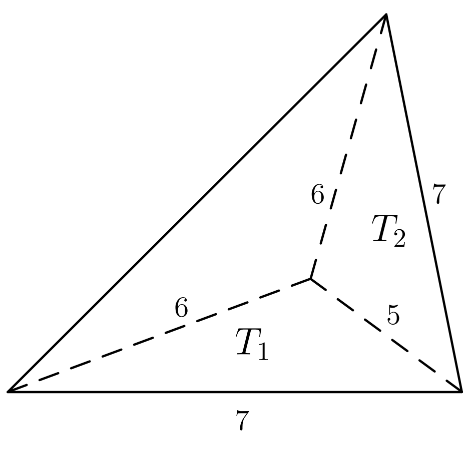
Учитывая последнее соотношение и неотрицательность квадратного корня, получим, что неравенство

$$\sqrt{\frac{9}{4} - t} \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(t - \frac{5}{4}\right) \leqslant 0$$

имеет единственное решение $t = \frac{9}{4}$, откуда $x = -1;\ 2$.

**10.** $\boxed{\text{Ответ: } \frac{144}{5}.}$

<u>Решение</u>.



Можно считать, что один из данных треугольников является основанием пирамиды, а второй — боковой гранью, имеющие общую сторону равную или 5, или 6, или 7. Обозначим эти треугольники соответственно $T_1$ и $T_2$. Объем пирамиды будет максимальным, если максимальной будет высота, опущенная на основание. Поэтому грань $T_2$ должна быть перпендикулярна грани $T_1$, следовательно, высотой пирамиды будет высота треугольника $T_2$. А максимальной высотой в треугольнике $T_2$ будет высота, опущенная на меньшую сторону, т. е. на сторону длиной 5. Отсюда следует, что эта сторона является общей для данных треугольников.

Теперь вычислим объем пирамиды. Площадь основания пирамиды по формуле Герона равна

$$\sqrt{9\cdot(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}.$$

Высота пирамиды равна

$$2\cdot 6\sqrt{6} : 5 = \frac{12\sqrt{6}}{5},$$

отсюда объем равен

$$\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{6}\cdot\frac{12\sqrt{6}}{5} = \frac{144}{5}.$$

## Вариант IV

1. Решить неравенство
$$|3x-8| + \sqrt{3x-5} \leqslant 3.$$

2. Годовой доход $\alpha-$банка на 10% выше, чем в $\beta-$банке. Положив в $\alpha-$банк некоторую сумму, втрое большую, чем в $\beta-$банк, через год получили общее увеличение капитала на $27,5\%$. Каков процент годового дохода, предлагаемый в каждом из банков?

3. Решить неравенство $3^{x^2}\cdot 5^x > 15$.

4. Решить уравнение
$$\sqrt{\sin 2x + 2\cos x} = \operatorname{ctg} x\cdot\sqrt{\sin 2x}.$$

5. В знакочередующейся геометрической прогрессии с первым положительным членом каждый член, начиная со второго, равен полуразности соседних членов. Найти знаменатель прогрессии.

6. Прямая касается окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника $ABC$, в точке $B$ и пересекает продолжение гипотенузы $AC$ за вершину $C$ в точке, удаленной от $C$ на расстояние 6. В каком отношении высота прямого угла делит гипотенузу, если $AC = 8$?

7. Решить неравенство

$$\frac{\log_{\frac{3}{4}} 81x^3 - \log_{\frac{3}{4}} 256}{|3\log_{\frac{3}{4}} x + 4|} \leqslant 3|\log_{\frac{3}{4}} x + 4|.$$

8. Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых графики функций $y = 2x - a$ и $y = (a+1)x^2 + 1$ пересекаются в одной точке.

9. Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2 - x + 2} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + x - 1) \leqslant [-x^2 - x + 2].$$

(Примечание: символом $[x]$ обозначается целая часть числа $x$.)

10. Найти максимально возможный объем треугольной пирамиды при условии, что две ее грани — равные треугольники со сторонами 3, 4 и 6.

## *Ответы:*

**1.** $\{5/3\} \cup [2;3]$;
**2.** $30\%, 20\%$;
**3.** $(-\infty; -\log_3 15) \cup (1;\infty)$;
**4.** $\pi/6 + 2\pi n$, $\pi/2 + \pi n$;
**5.** $1 - \sqrt{2}$, $-1 - \sqrt{2}$;
**6.** $7:3$;
**7.** $\left(0; (4/3)^{4/3}\right) \cup \left((4/3)^{4/3}; \infty\right)$;
**8.** $0$, $-1$, $-2$;
**9.** $-2$, $1$;
**10.** $455/72$.

## Вариант V

1. Решить уравнение $\log_{2x^2-7x+7} 3 \cdot \log_{\sqrt{3}}(x-1) = 1$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x-3} \leqslant \dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{2x+2}$.

3. Решить уравнение $\cos(\pi\cos x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos 2x\right) = 0$.

4. Решить уравнение $2x^{\log_6 x} = 3 \cdot 4^{\log_6 x}$.

5. Из пункта $A$ в пункт $B$ одновременно отправились два человека: лыжник и крестьянин с санями. Дорога шла через перевал (сначала — в гору, затем — под гору). Лыжник, добежав до $B$, повернул обратно, и встретился с крестьянином в самой высокой точке пути. Крестьянин ехал с горы на санях, и доехал до $B$ одновременно с тем, как лыжник добежал до $A$. Найти отношение длин склонов перевала, если скорость лыжника под гору в $2,5$ раза больше его скорости в гору, а скорость крестьянина под гору в $4\frac{5}{7}$ раза больше его скорости в гору.

6. В геометрической прогрессии со знаменателем $q$ первый, второй и четвертый члены образуют арифметическую прогрессию. Найти $q$, если известно, что $0 < |q| < 5/8$.

7. Окружность, вписанная в треугольник $ABC$ с прямым углом $A$, касается сторон $AB$ и $AC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Точка $M$ делит отрезок $PA$ в отношении $1:2$, считая от точки $P$. Из точки $M$ проведена касательная к окружности, пересекающая сторону $AC$ в точке $N$. Получившийся треугольник $AMN$ оказался подобным исходному. Найти отношение площадей треугольников $AMN$ и $ABC$.

8. При каких значениях параметра $a$ множество решений неравенства $x^2 - ax + \frac{3}{4}(a-1) \leqslant 0$ есть отрезок длины 1?

9. В тетраэдр $ABCD$ вписана сфера с центром $O$, касающаяся граней $ABC$ и $ABD$ в точках $K$ и $L$. Найти двугранный угол между этими гранями, если $AO = 5$, $OK = 3$, а угол $\angle KAL = \arcsin\frac{\sqrt{7}}{4}$.

10. Найти все решения уравнения $xy\sqrt{4x^2+4y-2(x^2+y)^2} = 1/2$, удовлетворяющие неравенству $x^2+2y^2 \leqslant 1$.

# *Решения*

**1.** $\boxed{\text{Ответ: 3.}}$

Решение.

$$\log_{2x^2-7x+7} 3\cdot\log_{\sqrt{3}}(x-1)=1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\log_3(2x^2-7x+7)}\cdot\frac{\log_3(x-1)}{1/2}=1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2\log_3(x-1)=\log_3(2x^2-7x+7),\\ 2x^2-7x+7\neq 1\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}(x-1)^2=2x^2-7x+7,\\ x>1,\\ x\neq 2;\ 3/2\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=2;\ 3,\\ x>1,\\ x\neq 2;\ 3/2\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x=3.$$

**2.** $\boxed{\text{Ответ: } (-\infty;\ -5]\cup\{-2\}\cup(-1;\ 3).}$

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $x^2+3x+2=0$. Решая это квадратное уравнение, находим корни $-2$ и $-1$, из которых данному неравенству удовлетворяет лишь $x=-2$.

2) $x^2+3x+2>0$. Разделив на $\sqrt{x^2+3x+2}$, получим систему

$$\begin{cases}\frac{1}{x-3}-\frac{1}{2x+2}\leqslant 0,\\ x^2+3x+2>0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\frac{x+5}{2(x-3)(x+1)}\leqslant 0,\\ (x+2)(x+1)>0\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\in(-\infty;\ -5]\cup(-1;\ 3),\\ x\in(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ +\infty)\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x\in(-\infty;\ -5]\cup(-1;\ 3)$$

Объединяя найденные решения, получим ответ.

**3.** $\boxed{\text{Ответ: } \pi n/2,\ n\in\mathbb{Z}.}$

Решение.

$$\cos(\pi\cos x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos 2x\right)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi\cos x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos 2x\right)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin\left(\frac{\pi(1-2\cos x+\cos 2x)}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi(1-2\cos x-\cos 2x)}{4}\right)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\frac{\pi(1-2\cos x+\cos 2x)}{4}=\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ \frac{\pi(1-2\cos x-\cos 2x)}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos^2 x - \cos x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \cos^2 x + \cos x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Сделаем замену $t = \cos x$ и рассмотрим квадратное уравнение

$$t^2 - t - 2m = 0, \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Найдем все значения $m$, при которых существуют корни, лежащие на отрезке $[-1;\ 1]$. Дискриминант уравнения $1+8m$ является неотрицательным только при $m \geqslant 0$. Корни уравнения равны

$$t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+8m}}{2},\ t_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+8m}}{2}.$$

Легко видеть, что $t_1 < -1$ и $t_2 > 1$ при $m > 1$; если $m = 0$, то $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$, а при $m = 1$ имеем $t_1 = -1$. Вспоминая, что $t = \cos x$, получим $x = \pi l/2,\ l \in \mathbb{Z}$. Аналогично решается уравнение $\cos^2 x + \cos x = 2k$, корнями которого являются $x = \pi l/2$, $l \in \mathbb{Z}$.

**4.** $\boxed{\text{Ответ: } 6;\ 2/3.}$

Решение. Умножая обе части уравнения на $(3/2)^{\log_6 x}$, получим

$$2x^{\log_6 x}\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_6 x} = 3x \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{3x}{2}\right)^{\log_6 x - 1} = 1.$$

Последнее равенство справедливо при

$$\frac{3x}{2} = 1 \quad \text{или} \quad \log_6 x - 1 = 0,$$

т. е. $x = 2/3;\ 6$.

**5.** $\boxed{\text{Ответ: } 7 : 6.}$

Решение. Обозначим через $v$ скорость лыжника в гору, через $v'$ — под гору; через $w$ обозначим скорость крестьянина в гору, а через $w'$ — под гору. Тогда $v' = 2,5v$ и $w' = 4\frac{5}{7}w$.

Пусть $S$ — расстояние от самой высокой точки до пункта $A$, а $kS$ — расстояние до пункта $B$. Дано, что лыжник, добежав до $B$, повернул обратно, и встретился с крестьянином в самой высокой точке пути, т. е.

$$\frac{S}{w} = \frac{S}{v} + \frac{kS}{v'} + \frac{kS}{v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{w} = \frac{3,5k + 2,5}{2,5v}.$$

Из того, что крестьянин доехал до $B$ одновременно с тем, как лыжник добежал до $A$, следует, что лыжник спускался с вершины горы ровно столько времени, сколько ехал крестьянин, т. е.

$$\frac{kS}{w'} = \frac{S}{v'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{4\frac{5}{7}w} = \frac{1}{2,5v}.$$

Выражая из последнего равенства $v$ через $w$, и подставляя в предпоследнее, получим квадратное уравнение $49k^2 + 35k - 66 = 0$, корнем которого является $k = 6/7$.

**6.** Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

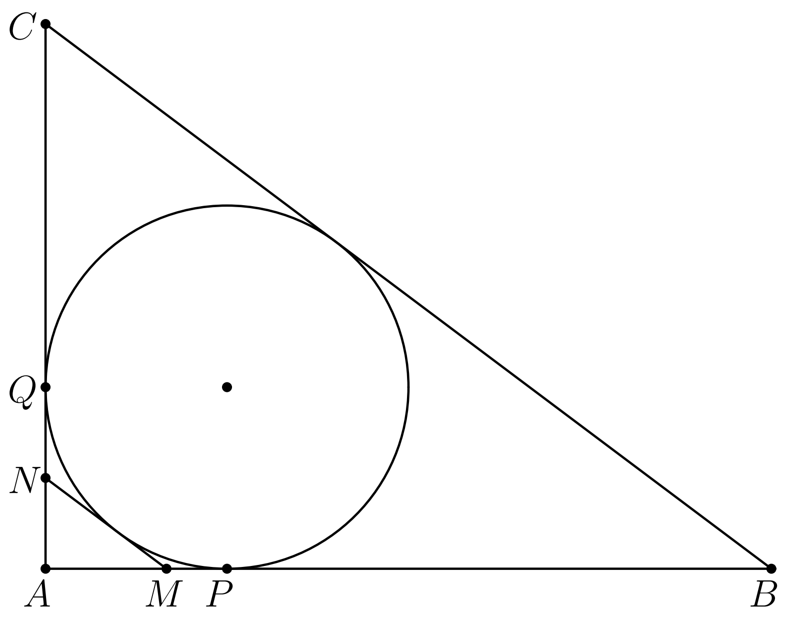
Решение. Пусть $b_1$, $b_2$ и $b_4$ — первый, второй и четвертый члены геометрической прогрессии. Поскольку они образуют арифметическую прогрессию, то

$$b_1 + b_4 = 2b_2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + q^3 = 2q.$$

Один корень кубического уравнения $q^3 - 2q + 1 = 0$ равен 1, поэтому, разделив на $(q-1)$ получим $q^2 + q - 1 = 0$, корнями которого являются числа $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Несложной проверкой убеждаемся, что неравенству $|q| < 5/8$ удовлетворяет только $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

**7.** Ответ: 1/36.

Решение.




Пусть $a = AB$, $b = AC$, $c = BC$. Обозначим через $k$ коэффициент подобия треугольников $AMN$ и $ABC$:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}=k,$$

тогда $AM=ka$, $AN=kb$, $MN=kc$. Данная окружность является вписанной в трапецию $BCNM$, тогда

$$MN+BC=BM+CN=(AB-AM)+(AC-AN),$$

т. е.

$$kc+c=(a-ka)+(b-kb)\quad\Rightarrow\quad k=\frac{a+b-c}{a+b+c}.$$

По условию $AM=\frac{2}{3}\cdot AP=\frac{2}{3}\cdot r$, где $r$ — радиус вписанной в треугольник $ABC$ окружности. В прямоугольном треугольнике $r=\frac{a+b-c}{2}$, тогда

$$k=\frac{AM}{AB}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{a+b-c}{2}}{a}=\frac{a+b-c}{3a}.$$

Приравнивая последнее выражение для $k$ к полученному ранее, найдем

$$\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{a+b-c}{3a}\quad\Rightarrow\quad c=2a-b.$$

Но $c^2=a^2+b^2$, тогда $(2a-b)^2=a^2+b^2$, откуда $b=\frac{3}{4}a$ и $c=2a-\frac{3a}{4}=\frac{5a}{4}$. Таким образом,

$$k=\frac{a+b-c}{3a}=\frac{a+\frac{3a}{4}-\frac{5a}{4}}{3a}=\frac{1}{6}.$$

Отношение площадей треугольников $AMN$ и $ABC$ равно $k^2=\frac{1}{36}$.

**8.** $\boxed{\text{Ответ: 1; 2.}}$

<u>Решение</u>. $x^2-ax+\frac{3}{4}(a-1)\leqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad(x-x_1)(x-x_2)\leqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad x\in[x_1;\,x_2]$, где

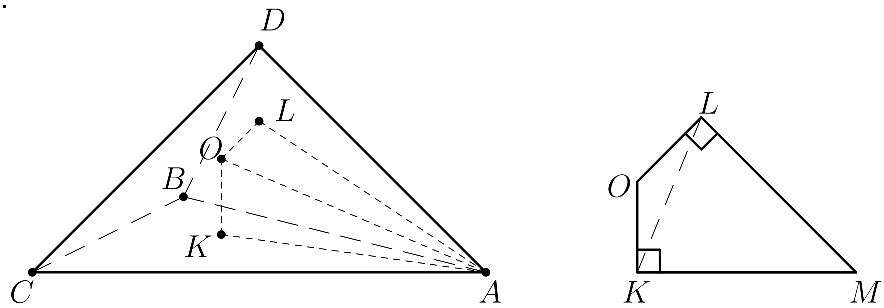
$$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-3a+3}}{2};\ x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-3a+3}}{2}.$$

Все искомые значения $a$ удовлетворяют уравнению $x_2-x_1=1$, решая которое, получим

$$\sqrt{a^2-3a+3}=1\quad\Leftrightarrow\quad a^2-3a+3=1\quad\Leftrightarrow\quad a=1;\,2.$$

**9.** $\boxed{\text{Ответ: } \arccos(-5/9).}$

<u>Решение</u>.




Прямоугольные треугольники $AOK$ и $AOL$ равны, поскольку имеют общую гипотенузу $AO$ и равные катеты $OK$ и $OL$. Поэтому

$$AK = AL = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

В равнобедренном треугольнике $KAL$ основание $KL$ находим по теореме косинусов

$$KL = \sqrt{AK^2 + AL^2 - 2 \cdot AK \cdot AL \cos \angle KAL} =$$
$$= 4\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\arcsin\tfrac{\sqrt{7}}{4}\right)\right)} = 2\sqrt{2}.$$

Опустим высоту $LM$ из точки $L$ на прямую $AB$ и рассмотрим четырехугольник $OKML$ с прямыми углами $OKM$ и $OLM$. Искомый двугранный угол равен углу $KML$; обозначим его через $\alpha$, тогда $\angle KOL = \pi - \alpha$.

Применяя еще раз теорему косинусов в равнобедренном треугольнике $OKL$, получим

$$KL^2 = OK^2 + OL^2 - 2 \cdot OK \cdot OL \cdot \cos(\pi - \alpha) \quad \Rightarrow \quad 8 = 18(1 + \cos\alpha) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{5}{9} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(-\frac{5}{9}\right).$$

**10.** $\boxed{\text{Ответ: } \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1}{2}\right).}$

<u>Решение</u>. Применяя неравенство о том, что среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического, получим

$$\sqrt{2}|xy| = \sqrt{x^2 \cdot 2y^2} \leqslant \frac{x^2 + 2y^2}{2} \leqslant \frac{1}{2},$$

т. е. $|xy| \leqslant 1/2\sqrt{2}$. Подставляя последнее в данное уравнение, найдем

$$\sqrt{4x^2 + 4y - 2(x^2 + y)^2} \geqslant \sqrt{2}.$$

Сделаем замену $z = x^2 + y$, тогда $\sqrt{4z - 2z^2} \geqslant \sqrt{2}$. Далее

$$\sqrt{4z - 2z^2} \geqslant \sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; 4z - 2z^2 \geqslant 2 \;\Leftrightarrow\; z = 1.$$

Отсюда $x^2 + y = 1$. Тогда

$$xy = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 4y - 2(x^2 + y)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Заметим также, что если $\sqrt{2}|xy|$ строго меньше, чем $\frac{x^2+2y^2}{2}$, то мы получим неравенство $\sqrt{4z - 2z^2} > \sqrt{2}$, которое не имеет решений. Отсюда следует, что

$$\frac{x^2 + 2y^2}{2} = \sqrt{2}|xy|,$$

т. е. $x^2 = 2y^2$. Следовательно,

$$xy = \sqrt{2}y^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; y = \pm\frac{1}{2}.$$

Получаем следующие пары

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right); \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right),$$

из которых решением является только первая.

## Вариант VI

1. Решить уравнение $\log_{2x^2+3x+2} 5 \cdot \log_{\sqrt{5}}(2 + x) = 1$.
2. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2 - 9x + 20}}{x - 2} \geqslant \dfrac{\sqrt{x^2 - 9x + 20}}{5 - x}$.
3. Решить уравнение $\sin(\pi \sin x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos 2x\right) = 0$.
4. Решить уравнение $5x^{\log_{10} x} = 2 \cdot 5^{2\log_{10} x}$.
5. Из пункта $A$ в пункт $B$ одновременно отправились два человека: лыжник и крестьянин с санями. Дорога шла через перевал (сначала — в гору, затем — под гору). Лыжник, добежав до $B$, повернул обратно, и встретился с крестьянином в самой высокой точке пути. Крестьянин ехал с горы на санях, и доехал до $B$ одновременно с тем, как лыжник добежал до $A$. Найти отношение длин склонов перевала, если скорость лыжника под гору в 2 раза больше его скорости в гору, а скорость крестьянина под гору в $2\frac{2}{3}$ раза больше его скорости в гору.

6. В геометрической прогрессии со знаменателем $q$ первый, третий и четвертый члены образуют арифметическую прогрессию. Найти $q$, если известно, что $0 < |q| < 5/8$.

7. Окружность, вписанная в треугольник $ABC$ с прямым углом $A$, касается сторон $AB$ и $AC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Точка $M$ делит отрезок $PA$ в отношении $2:3$, считая от точки $P$. Из точки $M$ проведена касательная к окружности, пересекающая сторону $AC$ в точке $N$. Получившийся треугольник $AMN$ оказался подобным исходному. Найти отношение площадей треугольников $AMN$ и $ABC$.

8. При каких значениях параметра $a$ множество решений неравенства $x^2 - \sqrt{a}x - a^2 + \frac{1}{2} \leqslant 0$ есть отрезок длины 1?

9. В тетраэдр $ABCD$ вписана сфера с центром $O$, касающаяся граней $ABC$ и $ABD$ в точках $K$ и $L$. Найти двугранный угол между этими гранями, если $AO = 3$, $OK = 1$, а угол $\angle KAL = \arcsin\frac{\sqrt{11}}{6}$.

10. Найти все решения уравнения $xy\sqrt{4x + 4y^2 - 2(x + y^2)^2} = 1/2$, удовлетворяющие неравенству $2x^2 + y^2 \leqslant 1$.

## *Ответы:*

**1.** 2;
**2.** $(2;\, 3{,}5] \cup \{4\} \cup (5; \infty)$;
**3.** $\pi k/2$, $(-1)^n \arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$;
**4.** 10, 5/2;
**5.** 3 : 2;
**6.** $(1 - \sqrt{5})/2$;
**7.** 36/1225;
**8.** 3/4;
**9.** $\arccos(1/3)$;
**10.** $\big(1/2; 1/\sqrt{2}\big)$.

# Основной экзамен

## Вариант VII

1. Решить уравнение $\sqrt{24-2x-x^2} = x+2$.

2. Решить неравенство: $x^2 \leqslant |2x-1|$.

3. Три числа $a, b, c$ образуют геометрическую прогрессию, причем их сумма равна 7, а сумма их квадратов равна 21. Найти знаменатель прогрессии.

4. Найти $\sin\frac{\alpha}{4}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{24}{7}$ и что $13\pi < \alpha < 14,5\pi$.

5. Решить неравенство:
$$\frac{\sqrt{x+9}}{3-x} \leqslant \frac{x+3}{\sqrt{|x-9|}}.$$

6. Продолжения высот $BB_1$ и $CC_1$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекают описанную около него окружность соответственно в точках $D$ и $E$. Найти радиус этой окружности, если известно, что $BC = a$, а $DE = b$.

7. Решить уравнение:
$$0,5 + \log_2\left(-\sin\frac{x}{2}\right) = \log_4(-\cos 2x).$$

8. Найти площадь фигуры, расположенной на координатной плоскости и состоящей из точек $(x, y)$, удовлетворяющих неравенству:
$$||x|-6| + ||y|-7| \leqslant 10.$$

9. Найти все пары постоянных $a$ и $b$, при которых функция
$$f(x) = a2^x + 3^{bx}$$
является а) нечетной, б) четной.

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 3. На ребрах $BC$ и $CD$ отмечены соответственно точки $F$ и $G$ так, что $BF : FC = DG : GC = 2 : 1$. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки $F, G$ и $A_1$.

# *Решения*

**1.** $\boxed{\text{Ответ: 2.}}$

Решение.

$$\sqrt{24-2x-x^2}=x+2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 24-2x-x^2=(x+2)^2, \\ x\geqslant -2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2x^2+6x-20=0, \\ x\geqslant -2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x\geqslant -2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x=2.$$

**2.** $\boxed{\text{Ответ: } \left[-1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}\right]\cup\{1\}.}$

Решение.

$$x^2\leqslant|2x-1| \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} 2x-1\geqslant x^2, \\ 2x-1\leqslant -x^2 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x^2-2x+1\leqslant 0, \\ x^2+2x-1\leqslant 0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} (x-1)^2\leqslant 0, \\ (x-x_1)(x-x_2)\leqslant 0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x_1\leqslant x\leqslant x_2 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad x\in[x_1,\ x_2]\cup\{1\},$$

где $x_1=-1-\sqrt{2}$, $x_2=-1+\sqrt{2}$.

**3.** $\boxed{\text{Ответ: } 2;\ \frac{1}{2}.}$

Решение. Обозначая первый, второй и третий члены прогрессии через $a$, $b$ и $c$, соответственно, и учитывая равенство $ac=b^2$, получим

$$\begin{cases} a+b+c=7, \\ a^2+b^2+c^2=21 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a+b+c=7, \\ (a+c-b)(a+c+b)=21 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a+b+c=7, \\ a+c-b=3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad b=2.$$

Пусть $q$ — знаменатель прогрессии, тогда

$$\frac{2}{q}+2+2q=7 \quad\Leftrightarrow\quad 2q^2-5q+2=0 \quad\Rightarrow\quad q=2;\ \frac{1}{2}.$$

**4.** $\boxed{\text{Ответ: } -\dfrac{3}{\sqrt{10}}.}$

Решение. Из условия задачи следует, что $13,5\pi < \alpha < 14\pi$. Поскольку $\alpha$ лежит в IV четверти тригонометрического круга, то

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{24}{7}\right)^2}} = \frac{7}{25}.$$

Так как $6,75\pi < \frac{\alpha}{2} < 7\pi$, то $\frac{\alpha}{2}$ находится во II четверти, поэтому

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = -\frac{4}{5}.$$

И, наконец, учитывая, что $\frac{\alpha}{4}$ лежит в III четверти, получим

$$\sin\frac{\alpha}{4} = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

**5.** $\boxed{\text{Ответ: } \{0\}\cup(3,\,9)\cup(9,\,+\infty).}$

Решение.

$$\frac{\sqrt{x+9}}{3-x} \leqslant \frac{x+3}{\sqrt{|x-9|}} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|x^2-81|}+x^2-9}{(3-x)\sqrt{|x-9|}} \leqslant 0, \\ x \geqslant -9. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая: 1) $-9 \leqslant x < 3$ и 2) $x > 3$, $x \neq 9$.

1) $-9 \leqslant x < 3$, тогда

$$\sqrt{|x^2-81|} \leqslant 9-x^2.$$

Заменяя $x^2$ на $t$, получим

$$\sqrt{|t+72|} \leqslant t \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} t \geqslant 0, \\ t+72 \leqslant t^2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} t \geqslant 0, \\ (t-9)(t+8) \geqslant 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad t \geqslant 9 \quad\Leftrightarrow\quad -x^2 \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0.$$

2) $x > 3$, $x \neq 9$, тогда $\sqrt{|x^2-81|} \geqslant 9-x^2$. Решением неравенства $\sqrt{|x^2-81|} \leqslant 9-x^2$ является лишь $x=0$, при котором достигается равенство, следовательно, решением неравенства

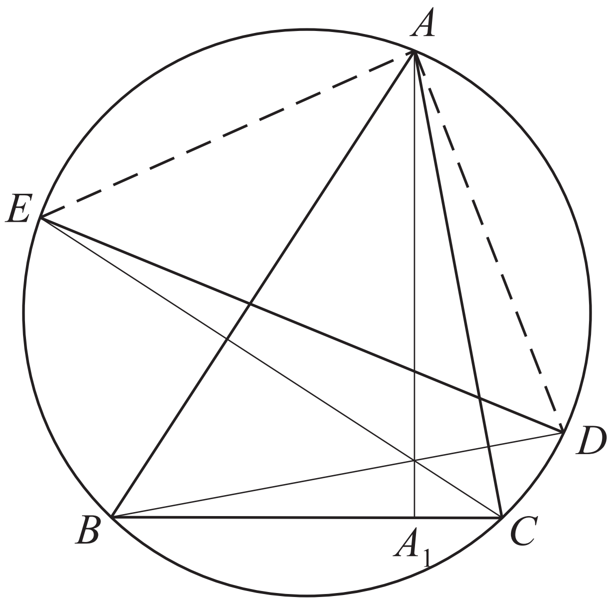
$$\sqrt{|x^2-81|} \geqslant 9-x^2$$

будет вся числовая ось, т. к. подкоренное выражение определено при всех $x$. Отсюда $x \in (3,\, 9) \cup (9,\, +\infty)$.

Объединяя полученные результаты, получим ответ.

**6.** $\boxed{\text{Ответ: } a^2/\sqrt{4a^2 - b^2}.}$

Решение.




Покажем, что угол $EAD$ в два раза больше угла $BAC$. Действительно, $\angle BAA_1 = \angle BCC_1$, т. к. они дополняют угол $ABC$ до $90^\circ$. $\angle BAE = \angle BCE$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу $BE$. Поэтому $\angle BAE = \angle BAA_1$. Аналогично $\angle CAA_1 = \angle DAC$. Обозначая $\angle BAC$ через $\alpha$ и радиус окружности через $R$, получим

$$b = 2R\sin 2\alpha, \quad a = 2R\sin\alpha.$$

Отсюда $b/a = 2\cos\alpha$, тогда

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{a}{2\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{a}{2\sqrt{1-\frac{b^2}{4a^2}}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}.$$

**7.** $\boxed{\text{Ответ: } x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.}$

Решение.

$$\frac{1}{2} + \log_2\left(-\sin\frac{x}{2}\right) = \log_4(-\cos 2x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_2 2 + 2\log_2\left(-\sin\frac{x}{2}\right) = \log_2(-\cos 2x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\sin^2\frac{x}{2} = -\cos 2x, \\ \sin\frac{x}{2} < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1-\cos x = 1-2\cos^2 x, \\ \sin\frac{x}{2} < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

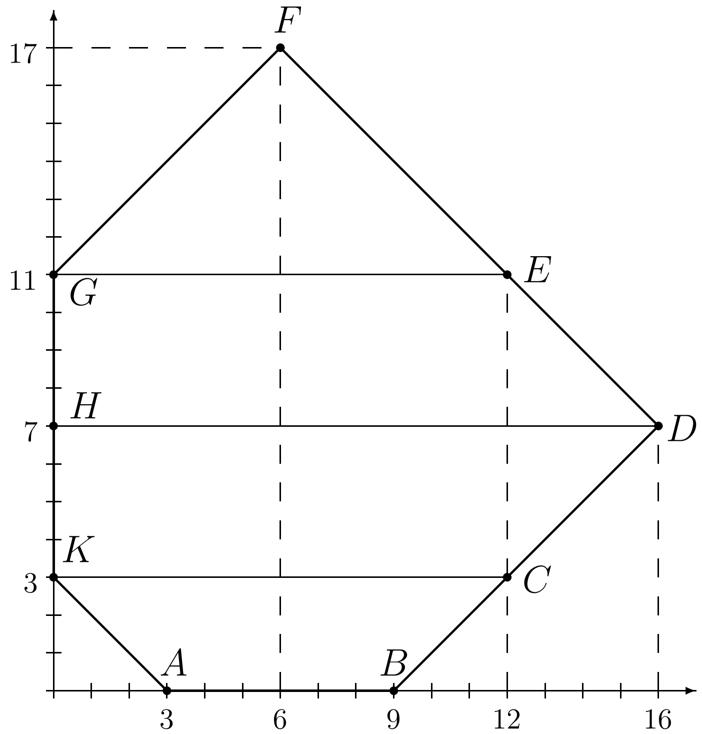
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x(2\cos x - 1) = 0, \\ \sin\frac{x}{2} < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \sin\frac{x}{2} < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}, \\ \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{4}, \end{array}\right. \\ \sin\frac{x}{2} < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}, \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

**8.** $\boxed{\text{Ответ: 700.}}$

Решение.




Поскольку данная фигура является симметричной относительно осей координат, то достаточно найти площадь ее части, лежащей в первой четверти, и умножить на 4. В первой четверти это будет шестиугольник $ABDFGK$, площадь которого равна сумме площадей треугольника $EFG$ и трапеций $DEGH$, $CDHK$ и $ABCK$. Вычислим их.

$S_{EFG} = 12 \cdot (17-11)/2 = 36$, $S_{DEGH} = (16+12)(11-7)/2 = 56$,
$S_{CDHK} = S_{DEGH}$ и $S_{ABCK} = (9-3+12)\cdot 3/2 = 27$.

Поэтому искомая площадь равна $(36+56+56+27)\cdot 4 = 700$.

**9.** $\boxed{\text{Ответ: а) } (-1;\ \log_3 2),\ (-1;\ -\log_3 2);\ \text{б) } (0;\ 0),\ (-1;\ \log_3 2),\ (1, -\log_3 2).}$

Решение.

а) Если $f(x)$ — нечетная функция, то $f(0) = 0$, поэтому $a = -1$. Из равенства $f(1) + f(-1) = 0$ получим, что $3^b = 2$ или $3^b = 1/2$, откуда $b = \log_3 2, -\log_3 2$. Подставляя полученные значения, найдем $f(x) \equiv 0$ или $f(x) = 2^{-x} - 2^x$, которые, как легко видеть, нечетные.

б) Рассмотрим несколько случаев:

1) $a = 0$. Тогда из равенства $f(1) = f(-1)$ получим $3^b = 3^{-b}$, отсюда $b = 0$.

2) $a < 0$. Покажем, что в этом случае $a = -1$. Действительно, рассмотрим уравнение $f(x) = 0$, которое можно переписать в виде

$$\left(\frac{3^b}{2}\right)^x = -a.$$

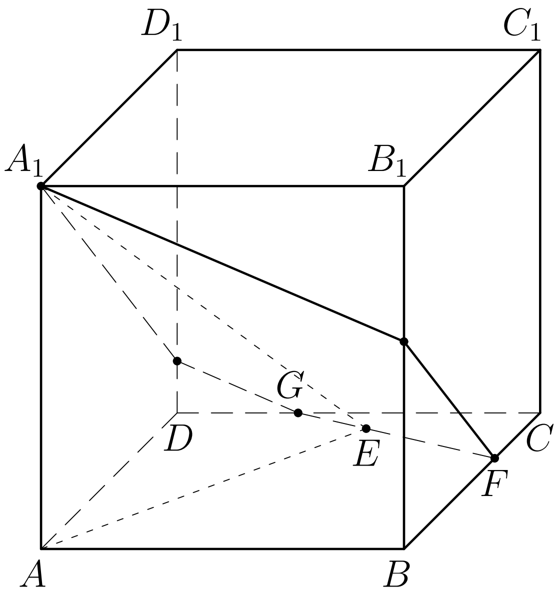
Если $3^b = 2$, то $a = -1$ и решением уравнения будет вся числовая ось.

В случае $3^b \neq 2$ имеем единственное решение $x_0 = \log_{3^b/2}(-a)$. Но $-x_0$ также является решением в силу четности $f(x)$, следовательно, $x_0 = 0$ и тогда $a = -1$. Из равенства $f(1) = f(-1)$ найдем $3^b = 2$, поэтому $b = \log_3 2$. Подставляя полученное, получим функцию $f(x) \equiv 0$, которая является четной.

3) $a > 0$. Если $f(x)$ — четная функция, то и $g(x) = f(cx) - af(x)$ — четная. Положим $c = \log_2 3^b$, тогда $g(x) = -a^2 2^x + 3^{bcx}$. Как и в случае 2) найдем $a^2 = 1$ и $bc = \log_3 2$, следовательно, $a = 1$ и $b = \pm\log_3 2$. Если $b = \log_3 2$, то $f(x) = 2^{x+1}$, которая не является четной, а при $b = -\log_3 2$ получим $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, являющаяся четной.

**10.** $\boxed{\text{Ответ: } 17\sqrt{43}/10.}$

Решение.




Пятиугольник $ABFGD$ является ортогональной проекцией сечения на плоскость $ABC$. Поэтому площадь сечения равна

$$\frac{|ABFGD|}{\cos\alpha},$$

где $\alpha$ — угол между их плоскостями. Опустим из точки $A_1$ на прямую $GF$ перпендикуляр $A_1E$, тогда $\alpha = \angle AEA_1$. $|CE| = \sqrt{2}/2$ как высота равнобедренного прямоугольного треугольника $FCG$, следовательно, $|AE| = |AC| - |EC| = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}/2 = 5\sqrt{2}/2$. Далее,

$$|A_1E| = \sqrt{|AE|^2 + |AA_1|^2} = \sqrt{25/2 + 9} = \sqrt{43/2}.$$

Тогда $\cos\alpha = 5/\sqrt{43}$. Но $|ABFGD| = |ABCD| - |FCG| = 9 - 1/2 = 17/2$, которое разделив на $\cos\alpha$, получим требуемое.

## Вариант VIII

1. Решить уравнение $\sqrt{24 + 2x - x^2} = 2 - x$.

2. Решить неравенство: $x^2 > |2x + 1|$.

3. Три числа $a, b, c$ образуют геометрическую прогрессию, причем сумма крайних чисел большего среднего на 3, а сумма квадратов всех чисел равна 21. Найти знаменатель прогрессии.

4. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$, если известно, что $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$ и что $10\pi < \alpha < 11,5\pi$.

5. Решить неравенство:
$$\frac{x+2}{\sqrt{|x-4|}} \geqslant \frac{\sqrt{x+4}}{2-x}.$$

6. Вокруг остроугольного треугольника $ABC$ описана окружность радиуса $R$. Высоты $AA_1$ и $BB_1$ продолжены до пересечения с этой окружностью соответственно в точках $M$ и $N$. Найти длину отрезка $MN$, если $AB = a$.

7. Решить уравнение:
$$\log_4(2\cos 2x) = 0,5 + \log_2\left(-\sin\frac{x}{2}\right).$$

8. Найти площадь фигуры, расположенной на координатной плоскости и состоящей из точек $(x, y)$, удовлетворяющих неравенству:
$$||x|-3| + ||y|-1| \leqslant 6.$$

9. Найти все пары постоянных $a$ и $b$, при которых функция
$$f(x) = 7^{ax} - b3^{-x}$$
является а) нечетной, б) четной.

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 4. На ребрах $BC$ и $CD$ отмечены соответственно точки $F$ и $G$ так, что $BF : FC = DG : GC = 3 : 1$. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки $F, G$ и $A_1$.

## *Ответы:*

**1.** $-2$;
**2.** $(-\infty, -1) \cup (-1, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$;
**3.** $1/2, 2$;
**4.** $-1/2$;
**5.** $\{0\} \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$;
**6.** $2a\sqrt{1 - a^2/4R^2}$;
**7.** $-\pi + 4\pi n$, $-2\arcsin 1/\sqrt{8} + 4\pi n$, $\pi n + 2\arcsin 1/\sqrt{8} + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
**8.** $160$;
**9.** а)$(\log_7 3, 1)$, $(-\log_7 3, 1)$; б)$(0, 0)$, $(-\log_7 3, 1)$, $(\log_7 3, -1)$;
**10.** $279/14$.

# Варианты 2002 года

## Вариант I

1. Решить уравнение $|x-3| = |5-2x|$.

2. Двое рабочих, работая вместе, могут вскопать огород за $m$ часов. Сколько времени понадобится каждому из них для выполнения этой работы, вскапывая огород по отдельности, если второй рабочий будет выполнять всю эту работу на $n$ часов больше, чем первый рабочий.

3. Решить неравенство $\sqrt{10x^2 - 30x + 20} \leqslant 3x - 3$.

4. Длина стороны $BC$ треугольника $ABC$ равна 6. Около треугольника описана окружность радиуса 5. Найти длины сторон $AB$ и $AC$ треугольника, если известно, что радиус $OA$ окружности делит сторону $BC$ пополам.

5. Найти наименьшие по модулю корни уравнения $\sin^2 9x + \cos^2 9 = 1$.

6. Прямая, проходящая через точку пересечения медиан треугольника $ABC$, пересекает стороны $BA$ и $BC$ в точках $A'$ и $C'$ соответственно. При этом $BA = 3$, $BC = 2$, $BA' \cdot BC' = \frac{8}{3}$. Найти $BA'$.

7. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = & 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = & 5. \end{cases}$$

8. Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых неравенство
$$2x^2 - 3ax + 6x - 2a^2 + 3a \leqslant 0$$
имеет ровно четыре целочисленных решения.

9. Решить неравенство
$$(\sin 3x - \cos 3x)(8\sin 2x - 4\cos 4x - 3) \geqslant 9\sqrt{2}.$$

10. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро $SC$ равно ребру $AB$ и наклонено к плоскости основания $ABC$ под углом $60°$. Известно, что вершины $A$, $B$, $C$ и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1. Найти высоту пирамиды.

# *Решения*

**1.** $\boxed{\text{Ответ: } 2;\ 8/3.}$

Решение.

$$|x-3| = |5-2x| \quad \Leftrightarrow \quad |x-3|^2 = |5-2x|^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = (5-2x)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-3)^2-(5-2x)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ((x-3)-(5-2x))((x-3)+(5-2x)) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (3x-8)(2-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8/3;\ 2.$$

**2.** $\boxed{\text{Ответ: } m - \frac{n}{2} + \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{4}} \text{ час., } m + \frac{n}{2} + \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{4}} \text{ час.}}$

Решение. Пусть $A$ — объем работы, $x$ — время, которое требуется первому рабочему для выполнения всей работы, $y$ — второму рабочему, тогда $A/x$ и $A/y$ — их производительности. По условию

$$\begin{cases} m(\frac{A}{x} + \frac{A}{y}) = A, \\ x = y + n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m(x+y) = xy, \\ x = y + n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad m(2y+n) = y^2+ny \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2+(n-2m)y-mn = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_{1,2} = \frac{2m-n \pm \sqrt{(n-2m)^2+4mn}}{2}.$$

Один из корней последнего уравнения является отрицательным, поэтому отбрасывая его, получим

$$y = \frac{2m-n+\sqrt{n^2+4m^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2m+n+\sqrt{n^2+4m^2}}{2}.$$

**3.** $\boxed{\text{Ответ: } \{1\} \cup [2; 11].}$

Решение.

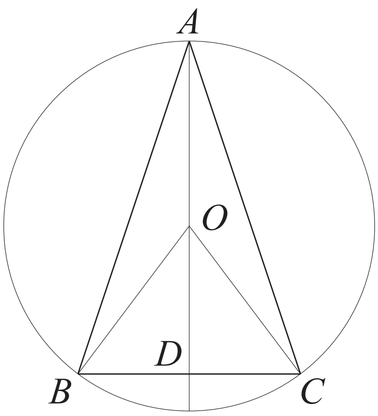
$$\sqrt{10x^2-30x+20} \leqslant 3x-3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{10}\sqrt{(x-1)(x-2)} \leqslant 3(x-1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)(x-2) \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0, \\ 10(x-1)(x-2) \leqslant 9(x-1)^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \{1\} \cup [2;\ +\infty), \\ (x-1)(x-11) \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \{1\} \cup [2;\ +\infty), \\ x \in [1;\ 11] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{x\} \cup [2;\ 11].$$

**4.** $\boxed{\text{Ответ: } AB = AC = 3\sqrt{10}.}$

Решение.




Пусть $D$ — середина стороны $BC$. Треугольник $BOC$ является равнобедренным, поэтому медиана $OD$ является также и высотой, а значит, $AD$ является и медианой и высотой треугольника $ABC$, т. е. $AB = AC$. Далее, $OD = 4$, следовательно,

$$AB = AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} =$$
$$= \sqrt{(5+4)^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}.$$

**5.** $\boxed{\text{Ответ: } \pm\left(\frac{\pi}{3} - 1\right).}$

Решение.

$$\sin^2 9x + \cos^2 9 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 9x - \sin^2 9 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (\sin 9x - \sin 9)(\sin 9x + \sin 9) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 4\sin\frac{9x-9}{2}\cos\frac{9x+9}{2}\sin\frac{9x+9}{2}\cos\frac{9x-9}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin(9x-9)\sin(9x+9) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = 1 + \pi n/9,\ n \in \mathbb{Z}, \\ &x = -1 + \pi n/9,\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

В каждом семействе корней выберем минимальные положительные и максимальные отрицательные:

$$x_1 = 1 - 2\pi/9; \quad x_2 = 1 - \pi/3; \quad x_3 = -1 + 2\pi/9; \quad x_4 = -1 + \pi/3.$$

Заметим, что

$$|x_1| = |x_3| = 1 - \frac{2\pi}{9}, \quad |x_2| = |x_4| = -1 + \frac{\pi}{3}$$

и

$$-1 + \frac{\pi}{3} < 1 - \frac{2\pi}{9},$$

поэтому условию задачи удовлетворяют $x_2$ и $x_4$.

**6.** $\boxed{\text{Ответ: } 2.}$

<u>Решение</u>. Проведем через точку пересечения медиан прямую, параллельную $AC$ и пусть $A''$ и $B''$ — точки пересечения с $BA$ и $BC$, тогда $BA'' = 2$ и $BC'' = 4/3$, поскольку медианы делится в отношении $2 : 1$ в точке их пересечения. Но $BA'' \cdot BC'' = 8/3$ и $BA' \cdot BC' = 8/3$, откуда следует, что $A' = A''$, $B' = B''$, в силу единственности отрезка $A'C'$.

**7.** $\boxed{\text{Ответ: } (1+\sqrt{2};\ -1),\ (1-\sqrt{2};\ -1).}$

<u>Решение</u>.

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1, \\ 3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4, \\ 3(x-1)^2 - 2(y+1)^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 7(x-1)^2 = 14 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad (y+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -1.$$

**8.** $\boxed{\text{Ответ: } \left(-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left[\frac{5}{2}; 3\right).}$

<u>Решение</u>. Решением уравнения

$$2x^2 - 3ax + 6x - 2a^2 + 3a = 0$$

являются $-a/2$ и $2a - 3$. Заметим, что $2a - 3 > -a/2$ при $a > 6/5$. Рассмотрим два случая: 1) $a > 6/5$ и 2) $a < 6/5$.

1) $a > 6/5$. Отрезок $[-a/2;\ 2a-3]$ содержит ровно четыре целых числа лишь тогда, когда

$$\begin{cases} -a/2 \in \mathbb{Z}, \\ -\frac{a}{2} + 3 \leqslant 2a - 3 < -\frac{a}{2} + 4 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -a/2 \notin \mathbb{Z}, \\ [-a/2] + 4 \leqslant 2a - 3 < [-a/2] + 5, \end{cases}$$

где через $[-a/2]$ обозначена целая часть $-a/2$. Легко видеть, что первая система не имеет решения. Решим неравенство из второй системы.

$$[-a/2] + 4 \leqslant 2a - 3 < [-a/2] + 5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a - 8 < [-a/2], \\ 2a - 7 \geqslant [-a/2] \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a - 8 < -a/2 - \{-a/2\}, \\ 2a - 7 \geqslant -a/2 - \{-a/2\} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2,5a - 8 < -\{-a/2\}, \\ 2,5a - 7 \geqslant -\{-a/2\} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2,5a - 8 < 0, \\ 2,5a - 7 > -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 2,4 < a < 3,2$$

(здесь мы через $\{-a/2\}$ обозначили дробную долю $-a/2$ и воспользовались неравенством $0 \leqslant \{-a/2\} < 1$).

Из полученного неравенства $2,4 < a < 3,2$ найдем $-1,6 < -\frac{a}{2} < -1,2$, тогда $[-a/2] = -2$, поэтому

$$\begin{cases} -a/2 \notin \mathbb{Z}, \\ [-a/2] + 4 \leqslant 2a - 3 < [-a/2] + 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a - 3 < [-a/2] + 5, \\ 2a - 3 \geqslant [-a/2] + 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a - 3 < 3, \\ 2a - 3 \geqslant 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left[\frac{5}{2};\, 3\right).$$

2) $a < 6/5$. Аналогично имеем две системы

$$\begin{cases} 2a - 3 \in \mathbb{Z}, \\ (2a - 3) + 3 \leqslant -a/2 < (2a - 3) + 4 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 2a - 3 \notin \mathbb{Z}, \\ [2a - 3] + 4 \leqslant -a/2 < [2a - 3] + 5. \end{cases}$$

Решим каждую из них.

$$\begin{cases} 2a - 3 \in \mathbb{Z}, \\ 2a \leqslant -a/2 < 2a + 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a \in \mathbb{Z}, \\ a \leqslant 0, \\ 2,5a > -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a \in \mathbb{Z}, \\ a \in (-2/5;\, 0] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = 0.$$

Теперь решим вторую

$$\begin{cases} 2a - 3 \notin \mathbb{Z}, \\ -a/2 < [2a - 3] + 5, \\ -a/2 \geqslant [2a - 3] + 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a \notin \mathbb{Z}, \\ -a/2 < (2a - 3) + 5 - \{2a - 3\}, \\ -a/2 \geqslant (2a - 3) + 4 - \{2a - 3\} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a \notin \mathbb{Z}, \\ 2,5a + 2 > \{2a - 3\}, \\ 2,5a + 1 \leqslant \{2a - 3\} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a \notin \mathbb{Z}, \\ 2,5a > -2, \\ 2,5a \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a \notin \mathbb{Z}, \\ a \in \left(-\frac{4}{5};\ 0\right] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left(-\frac{4}{5};\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};\ 0\right).$$

Далее,

$$\begin{cases} 2a-3 \notin \mathbb{Z}, \\ [2a-3]+4 \leqslant -a/2 < [2a-3]+5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in (-4/5;\ -1/2), \\ -1 \leqslant -a/2 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a \in (-1/2;\ 0), \\ 0 \leqslant -a/2 < 1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \in (-1/2;\ 0), \\ a \in (-2;\ 0] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-1/2;\ 0).$$

Итак, во втором случае решением является $a \in (-1/2;\ 0]$.

**9.** $\boxed{\text{Ответ: } \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, -\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n, \dfrac{7\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.}$

Решение. Имеем

$$\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right),$$

следовательно,

$$|\sin 3x - \cos 3x| \leqslant \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |8\sin 2x - 4\cos 4x - 3| \geqslant 9. \qquad (*)$$

С другой стороны,

$$8\sin 2x - 4\cos 4x - 3 = 8\sin^2 2x + 8\sin 2x - 7 = 8t^2 + 8t - 7$$

(здесь мы сделали замену $t = \sin 2x$). Заметим, что

$$8t^2 + 8t - 7 \geqslant -9$$

для всех $t$, причем равенство достигается при $t = -1/2$. Отсюда и из $(*)$ следует, что

$$\left[\begin{array}{l} 8t^2 + 8t - 7 = -9, \\ 8t^2 + 8t - 7 \geqslant 9 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = -1/2, \\ t \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad t \in (-\infty; -2] \cup \{-1/2\} \cup [1; +\infty).$$

Подставляя $\sin 2x$ вместо $t$, найдем

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = -1/2, \\ \sin 2x = 1. \end{array}\right.$$

Итак, данное неравенство эквивалентно

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}\sin 2x = -1/2,\\ \sin 3x - \cos 3x = -\sqrt{2},\end{cases}\\ &\begin{cases}\sin 2x = 1,\\ \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}\end{cases}\end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned}&\begin{cases}\sin 2x = -1/2,\\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}\end{cases}\\ &\begin{cases}\sin 2x = 1,\\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}\end{cases}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned}&x = -\tfrac{\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\\ &x = \tfrac{7\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\\ &x = \tfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}\right.$$

**10.** $\boxed{\text{Ответ: } \sqrt{3}.}$

Решение. По теореме о равенстве квадрата касательной произведению секущей на ее внешнюю часть получим, что вершина $S$ равноудалена о вершин $A$, $B$ и $C$. Поэтому вершина $S$, центр сферы и центр описанной около треугольника $ABC$ окружности лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости $ABC$. Поскольку $SC$ наклонено к $ABC$ под углом $60°$, то $SC = 2$, следовательно высота пирамиды равна $\sqrt{3}$.

## Вариант II

1. Решить уравнение $|x+5| = |3-2x|$.
2. Два грузовика одновременно выезжают из пункта $A$ в пункт $B$, отстоящий от него на расстояние $a$ километров. Скорость первого грузовика на $m$ километров в час больше, чем второго, и он приходит в пункт $B$ на $n$ часов раньше второго грузовика. Какова скорость каждого грузовика?
3. Решить неравенство $\sqrt{5x^2 - 30x + 40} \leqslant 2x - 4$.
4. Длина стороны $AB$ треугольника $ABC$ равна 24. Около треугольника описана окружность радиуса 13. Найти длины сторон $AC$ и $BC$ треугольника, если известно, что радиус $OC$ окружности делит сторону $AB$ пополам.
5. Найти наименьшие по модулю корни уравнения $\sin^2 4x + \cos^2 4 = 1$.
6. Прямая, проходящая через точку пересечения медиан треугольника $ABC$, пересекает стороны $AB$ и $AC$ в точках $B'$ и $C'$ соответственно. При этом $AB = \frac{9}{2}$, $AC = 1$, $AB' \cdot AC' = 2$. Найти $AB'$.

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y = -10 \\ 2x^2 - y^2 + 8x + 2y = -9. \end{cases}$$

8. Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых неравенство

$$3x^2 + 2ax - 6x - a^2 + 2a \leqslant 0$$

имеет ровно пять целочисленных решений.

9. Решить неравенство

$$(\sin 3x + \cos 3x)(8 \sin 2x + 4 \cos 4x + 3) \leqslant -9\sqrt{2}.$$

10. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро $AB$ равно ребру $AC$, а ребро $SA$ наклонено к плоскостям граней $ABC$ и $SBC$ под углом 45°. Известно, что вершина $A$ и середины всех ребер пирамиды, кроме $SA$, расположены на сфере радиуса 1. Найти площадь грани $ASC$.

## *Ответы:*

**1.** 8, $-2/3$;
**2.** $(mn + \sqrt{m^2n^2 + 4amn})/2n$, $(-mn + \sqrt{m^2n^2 + 4amn})/2n$;
**3.** $\{2\} \cup [4, 12]$;
**4.** $AC = BC = 4\sqrt{13}$;
**5.** $\pm(1 - \pi/4)$;
**6.** 3;
**7.** $(-2, 1 + \sqrt{2})$ и $(-2, 1 - \sqrt{2})$;
**8.** $(-3; -2] \cup [5; 6)$;
**9.** $-11\pi/12 + 2\pi n, 5\pi/12 + 2\pi n, -3\pi/4 + 2\pi n$ ;
**10.** $\sqrt{3}$.

# Варианты 2001 года

## Вариант I

1. Решите неравенство
$$-4 \leqslant \frac{2x}{x-3} \leqslant 1.$$

2. Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2 - 11x + 7} = 2 - x.$$

3. Дана некоторая арифметическая прогрессия, причем все ее члены положительны. Найдите значение $n$, при котором сумма $a_1 + a_n$ втрое меньше суммы первых $n$ членов этой прогрессии.

4. На сторонах $AB$ и $AD$ прямоугольника $ABCD$ площади 36 отмечены соответственно точки $E$ и $F$ так, что
$$AE : EB = 3 : 1 \quad \text{и} \quad AF : FD = 1 : 2.$$
Найти площадь треугольника $FOD$, где $O$ — точка пересечения отрезков $DE$ и $CF$.

5. Решите уравнение
$$4\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{9}\right)^{x}\right) = 5\left(\frac{1}{6}\right)^{x}.$$

6. Найдите значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\alpha$ удовлетворяет системе
$$\begin{cases} \pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi, \\ 3\sin\alpha\cos\alpha - 2 = \cos\alpha - 6\sin\alpha. \end{cases}$$

7. Найдите площадь фигуры, состоящей из всех таких точек, что их координаты $(x; y)$ удовлетворяют неравенству
$$(y - 3|x| - 1)\cdot(y - \sqrt{1 - x^2}) \leqslant 0.$$

8. Для всех значений параметра $a$ решите неравенство
$$ax^2 + ax + 3 > 0.$$

# *Решения*

**1.** $\boxed{\text{Ответ: } [-3;\ -2].}$

Решение.

$$-4 \leqslant \frac{2x}{x-3} \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \frac{2x}{x-3} \leqslant 1, \\ \frac{2x}{x-3} \geqslant -4 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \frac{x+3}{x-3} \leqslant 0, \\ \frac{6x-12}{x-3} \geqslant 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x \in [-3;\ 3), \\ x \in (-\infty;\ -2] \cup (3;\ +\infty) \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x \in [-3;\ -2].$$

**2.** $\boxed{\text{Ответ: } 1/2.}$

Решение.

$$\sqrt{3x^2 - 11x + 7} = 2 - x \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 3x^2 - 11x + 7 = x^2 - 4x + 4, \\ x \leqslant 2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 = 0, \\ x \leqslant 2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1/2, \\ x = 3 \end{array}\right. \\ x \leqslant 2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x = 1/2.$$

**3.** $\boxed{\text{Ответ: } 6.}$

Решение. Имеем

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Тогда по условию

$$3(a_1 + a_n) = \frac{(a_1 + a_n)n}{2},$$

откуда сокращая на $a_1 + a_n > 0$, получим $n = 6$.

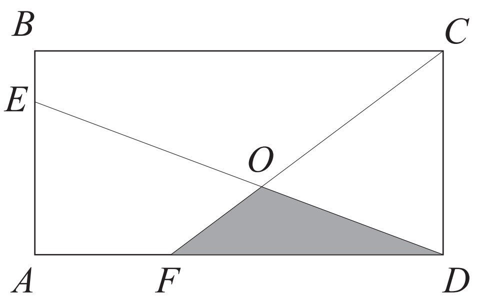
**4.** $\boxed{\text{Ответ: } 4.}$

Решение. Пусть $AE = 3x$, $EB = x$, $AF = y$, $FD = = 2y$, тогда

$$4x \cdot 3y = 36 \quad\Rightarrow\quad xy = 3.$$

Пусть $OG$ — высота треугольника $FOD$, тогда

$$\frac{OG}{GD} = \frac{AE}{AD} = \frac{3x}{3y} = \frac{x}{y} \quad\Rightarrow\quad OG = GD \cdot \frac{x}{y},$$




$$\frac{OG}{FG}=\frac{CD}{FD}=\frac{4x}{2y}=\frac{2x}{y} \quad\Rightarrow\quad \frac{OG}{2}=FG\cdot\frac{x}{y},$$

поэтому

$$OG=\frac{OG}{2}+\frac{x}{y}(GD+FG)=2x \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad OG=\frac{4x}{3}.$$

Итак,

$$S_{\triangle FOD}=\frac{1}{2}\cdot FD\cdot OG=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot\frac{4x}{3}=\frac{4xy}{3}=4.$$

**5.** $\boxed{\text{Ответ: } 0;\ \log_{3/2}4.}$

Решение.

$$4\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{9}\right)^{x}\right)=5\left(\frac{1}{6}\right)^{x} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{x}+4\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=5\left(\frac{1}{6}\right)^{x} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{9}{4}\right)^{x}-5\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+4=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&\left(\tfrac{3}{2}\right)^{x}=1,\\&\left(\tfrac{3}{2}\right)^{x}=4\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&x=0,\\&x=\log_{3/2}4.\end{aligned}\right.$$

**6.** Ответ: $3+2\sqrt{2}$.

Решение.

$$\begin{cases}\pi/2\leqslant\alpha\leqslant\pi,\\ 3\sin\alpha\cos\alpha-2=\cos\alpha-6\sin\alpha\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\pi/2\leqslant\alpha\leqslant\pi,\\ (3\sin\alpha-1)(\cos\alpha+2)=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\pi/2\leqslant\alpha\leqslant\pi,\\ \sin\alpha=1/3.\end{cases}$$

Следовательно, $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-2\sqrt{2}/3$. Поэтому

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}},$$

откуда

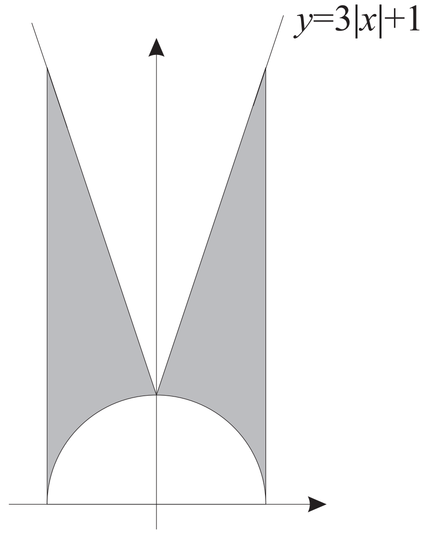
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = (1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}.$$

**7.** $\boxed{\text{Ответ: } 5-\frac{\pi}{2}.}$

Решение.

Данная фигура имеет вид (см. рис.) Вычислим площадь фигуры в правой полуплоскости. Искомая площадь равна разности площади трапеции и четверти круга:

$$\frac{S}{2} = (1+4)\cdot 1\cdot\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{5}{2}-\frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; S = 5-\frac{\pi}{2}.$$




**8.** Ответ:

$$\boxed{x \in \begin{cases} (x_1;\, x_2), & \text{если } a<0,\\ \mathbb{R}, & \text{если } 0\leqslant a<12,\\ (-\infty;\, x_1)\cup(x_2;\,\infty), & \text{если } a\geqslant 12 \end{cases}}$$

где $x = \frac{-1-\sqrt{D}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{D}}{2}$, $D = 1-12/a$.

Решение. Рассмотрим несколько случаев.

1) $a=0$. Тогда наше неравенство принимает вид $3>0$ решением которого является вся числовая прямая $\mathbb{R}$.

2) $a>0$. Разделив на $a$, получим неравенство

$$x^2+x+\frac{3}{a}>0.$$

Дискриминант $D$ последнего трехчлена равен $1-12/a$.

Имеем

$$D=0 \;\text{ при }\; a=12,$$

$$D > 0 \quad \text{при} \quad a > 12,$$
$$D < 0 \quad \text{при} \quad 0 < a < 12.$$

а) $0 < a < 12$. В этом случае решением неравенства $x^2 + x + \frac{3}{a} > 0$ будет вся числовая прямая $\mathbb{R}$.

б) $a = 12$. Тогда

$$x^2 + x + \frac{3}{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

в) $a > 12$. Имеем

$$x^2 + x + \frac{3}{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty),$$

где $x_1 = \frac{-1-\sqrt{D}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{D}}{2}$.

3) $a < 0$. Разделив на $a$, получим

$$x^2 + x + \frac{3}{a} < 0.$$

Заметим, что в этом случае дискриминант $D$ всегда положителен, поэтому

$$x^2 + x + \frac{3}{a} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (x_1, x_2).$$

## Вариант II

1. Найдите все решения неравенства

$$x^3 - 5x^2 + 4x \geqslant 0,$$

принадлежащие интервалу $(0; 5)$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x+1} = |x-3| - 2.$$

3. Укажите все возможные значения разности арифметической прогрессии, у которой первый член на 3 больше чем разность, а произведение суммы первых трех членов на сумму первых четырех членов отрицательно.

4. В треугольнике $ABC$ со сторонами

$$AC = BC = 12 \quad \text{и} \quad AB = 6$$

проведена биссектриса $AD$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника $ADC$.

5. Катер прошел из пункта $A$ в пункт $B$ по течению реки, развернулся, увеличил скорость (по отношению к воде) в $k$ раз и возвратился в пункт $A$. При каких значениях $k$ время следования из $B$ в $A$ будет меньше времени следования из $A$ в $B$? Известно, что скорость течения реки втрое меньше первоначальной скорости катера в стоячей воде.

6. Решите уравнение

$$\log_3(4\cos x - 1) - 2\log_9\left(\frac{1}{2\cos x + 1}\right) = \log_3 2 \cdot \log_{-\sin x}(-\sin x).$$

7. Найдите площадь фигуры, состоящей из всех таких точек, что их координаты $(x; y)$ удовлетворяют неравенству

$$(y - \sqrt{1 - x^2}) \cdot (y + |\operatorname{tg}(2\alpha) \cdot |x| - \cos\alpha| - \cos\alpha) \leqslant 0,$$

зная, что угол $\alpha$ удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

8. При каких значениях $a$ множество решений неравенства

$$\frac{a^2 - a}{2^x - 1} > 2^x$$

содержит бесконечный влево или вправо промежуток?

## *Ответы:*

**1.** $(0; 1] \cup [4; 5)$;
**2.** $0; 8$
**3.** $(-3/2; -6/5)$;
**4.** $8\sqrt{6}/3$;
**5.** $(5/2; +\infty)$;
**6.** $-\pi/3 + 2\pi n$;
**7.** $\pi - \sqrt{3}/2$;
**8.** $a \in (0; 1)$;

# Программа вступительных экзаменов по математике

Настоящая программа состоит из трех разделов.

В первом разделе перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть поступающий как на письменном, так и на устном экзамене.

Второй раздел представляет собой перечень вопросов теоретической части устного экзамена. При подготовке к письменному экзамену целесообразно познакомиться с формулировками утверждений этого раздела.

В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего на письменном и устном экзаменах.

Объем знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств из этого курса, включая и начала анализа. Однако для решения экзаменационных задач достаточно уверенного владения лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающими, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием отдельные утверждения второго раздела могут в некоторых учебниках называться иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вовсе отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать эти утверждения.

## I. Основные понятия

1. Натуральные числа. Делимость. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

2. Целые, рациональные и действительные числа. Проценты. Модуль числа, степень, корень, арифметический корень, логарифм. Синус, косинус, тангенс, котангенс числа (угла). Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.

3. Числовые и буквенные выражения. Равенства и тождества.

4. Функция, ее область определения и область значений. Возрастание, убывание, периодичность, четность, нечетность. Наибольшее и наименьшее значения функции. График функции.

5. Линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические функции.

6. Уравнение, неравенства, система. Решения (корни) уравнения, неравенства, системы. Равносильность.

7. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

8. Прямая на плоскости. Луч, отрезок, ломаная, угол.

9. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота.

10. Выпуклый многоугольник. Квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция. Правильный многоугольник. Диагональ.

11. Окружность и круг. Радиус, хорда, диаметр, касательная, секущая. Дуга окружности и круговой сектор. Центральный и вписанные углы.

12. Прямая и плоскость в пространстве. Двугранный угол.

13. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.

14. Цилиндр, конус, шар, сфера.

15. Равенство и подобие фигур. Симметрия.

16. Параллельность и перпендикулярность прямых, плоскостей. Скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью.

17. Касание. Вписанные и описанные фигуры на плоскости и в пространстве. Сечение фигуры плоскостью.

18. Величина угла. Длина отрезка, окружности и дуги окружности. Площадь многоугольника, круга и кругового сектора. Площадь поверхности и объем многогранника, цилиндра, конуса, шара.

19. Координатная прямая. Числовые промежутки. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Векторы.

## II. Содержание теоретической части устного экзамена

***Алгебра***

1. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
2. Свойства числовых неравенств.
3. Формулы сокращенного умножения.
4. Свойства линейной функции и ее график.
5. Формула корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители. Теорема Виета.
6. Свойства квадратичной функции и ее график.
7. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.
8. Формулы общего члена и суммы $n$ первых членов арифметической прогрессии.
9. Формулы общего члена и суммы $n$ первых членов геометрической прогрессии.
10. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями. Свойства арифметических корней $n$-й степени. Свойства степеней с рациональными показателями.
11. Свойства степенной функции с целым показателем и ее график.
12. Свойства показательной функции и ее график.
13. Основное логарифмическое тождество. Логарифмы произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию.
14. Свойства логарифмической функции и ее график.
15. Основное тригонометрическое тождество. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы приведения, сложения, двойного и половинного аргумента, суммы и разности тригонометрических функций. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму. Преобразование выражения $a\sin x + b\cos x$ с помощью вспомогательного аргумента.

16. Формулы решений простейших тригонометрических уравнений.
17. Свойства тригонометрических функций и их графики.

***Геометрия***

1. Теоремы о параллельных прямых на плоскости.
2. Свойства вертикальных и смежных углов.
3. Свойства равнобедренного треугольника.
4. Признаки равенства треугольников.
5. Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Свойства средней линии треугольника.
6. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников.
7. Признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора.
8. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла.
9. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника.
10. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону.
11. Свойство касательной к окружности. Равенство касательных, проведенных из одной точки к окружности. Теоремы о вписанных углах. Теорема об угле, образованном касательной и хордой. Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между двумя секущими, выходящими из одной точки. Равенство произведений отрезков двух пересекающихся хорд. Равенство квадрата касательной произведению секущей на ее внешнюю часть.
12. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность. Свойство четырехугольника, описанного около окружности.
13. Теорема об окружности, вписанной в треугольник. Теорема об окружности, описанной около треугольника.

14. Теоремы синусов и косинусов для треугольника.
15. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.
16. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма.
17. Свойства средней линии трапеции.
18. Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности.
19. Теоремы о параллельных прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей.
20. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. Признак перпендикулярности плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

## III. Требования к поступающему

*На экзамене по математике поступающий должен уметь:*

1) выполнять (без калькулятора) действия над числами и числовыми выражениями; преобразовывать буквенные выражения; производить операции над векторами (сложение, умножение на число, скалярное произведение); переводить одни единицы измерения величин в другие;
2) сравнивать числа и находить их приближенные значения (без калькулятора); доказывать тождества и неравенства для буквенных выражений;
3) решать уравнения, неравенства, системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения;
4) исследовать функции; строить графики функций и множества точек на координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами;
5) изображать геометрические фигуры на чертеже; делать дополнительные построения; строить сечения; исследовать взаимное расположение фигур; применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду;
6) пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий;

7) пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей, свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур;

8) пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические, тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объемы;

9) составлять уравнения, неравенства и находить значения величин, исходя из условия задачи;

10) излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.

*На устном экзамене поступающий должен дополнительно уметь:*

11) давать определения, формулировать и доказывать утверждения (формулы, соотношения, теоремы, признаки, свойства и т.п.), указанные во втором разделе настоящей программы;

12) анализировать формулировки утверждений и их доказательства;

13) решать задачи на построение циркулем, линейкой; находить геометрические места точек.

# Содержание