Республиканская студенческая предметная олимпиада по специальности «Математика» Астана, 13.04.17

Время работы: 4 часа.
Каждая задача оценивается в 10 баллов.
Запрещено пользоваться калькуляторами,
телефонами и прочими электронными устройствами!

1. Пусть $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, заданная рекуррентно: $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ и $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$ при $n \geqslant 1$. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{2^n},$$

   если известно, что данный ряд сходится.

2. Найдите все простые p, запись которых в k-ичной системе счисления при некотором натуральном $k > 1$ содержит ровно k различных цифр (старшая цифра не может быть нулём).

3. Докажите, что в любой группе квадрат произведения двух элементов порядка два и куб произведения двух элементов порядка три всегда являются коммутаторами.

4. Точка P лежит внутри выпуклой области, ограниченной параболой $y = x^2$, но не лежит на оси OY. Обозначим через $S(P)$ множество всех точек, полученных отражением P относительно всех касательных к параболе.

   а) Докажите, что значение суммы

$$\max_{(x,y)\in S(P)} y \ + \min_{(x,y)\in S(P)} y$$

   не зависит от выбора точки P.

   б) Найдите геометрическое место точек P таких, что $\max\limits_{(x,y)\in S(P)} y = 0$.

5. Для каждой функции $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ обозначим через $s_n(f)$ и $S_n(f)$ нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции f, соответствующие равномерному разбиению $[0, 1]$ на n частей. Существует ли такая интегрируемая функция f, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(f)$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(f)$ расходится?

6. Некоторые участники математической олимпиады списали решения некоторых задач у своих товарищей. Докажите, что можно с позором выгнать часть участников так, чтобы получилось, что более четверти от общего числа списанных решений было списано выгнанными участниками у не выгнанных.

Republican university students mathematical olympiad
Astana, 13.04.17

Contest duration: 4 hours.
Each problem is worth 10 points.
Calculators, mobile phones
and other electronic devices are not allowed!

1. Let $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ be the sequence consisting of positive integers and satisfying the following properties: $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ and $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$ for all $n \geqslant 1$. Calculate the sum of infinite series:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{2^n},$$
if it is known that series converges.

2. Find all primes p such that p has exactly k different digits in its k-ary representation for some $k > 1$ (leading digit is nonzero).

3. Prove that any group has the following property: square of the product of two elements of order two is commutator and cube of the product of two elements of order three is commutator.

4. Point P lies inside convex region bounded by parabola $y = x^2$, but does not lie on the Y-axis. Denote by $S(P)$ the set of reflections of P with respect to all tangents to parabola.

   a) Prove that the value
$$\max_{(x,y)\in S(P)} y + \min_{(x,y)\in S(P)} y$$
   does not depend on P position.

   б) Find the locus of points P such that $\max\limits_{(x,y)\in S(P)} y = 0$.

5. Denote by $s_n(f)$ and $S_n(f)$ the lower and the upper Darboux sums for function $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ and uniform partition of $[0, 1]$ on n segments. Does there exist integrable f such that $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(f)$ converges and $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(f)$ diverges?

6. Some participants of mathematical contest are cheaters. They copied some solutions from their friends. Prove that the organizers can expel come students with shame such that expelled participants copied more than $\frac{N}{4}$ solutions from non expelled participants, where N is total number of copied solutions.

«Математика» мамандығы бойынша Республикалық пәндік студенттік олимпиада Астана, 11.04.17

Жұмыс уақыты: 4 сағат.
Әрбір тапсырма 10 ұпаймен бағаланады.
Калькуляторларды, телефондарды және басқа электрондық құралдарды қолдануға болмайды!

1. Айталық $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ — келесідей рекуррентті берілген натурал сандар тізбегі: $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ және $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$, $n \geqslant 1$. Егер қатар
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{2^n},$$
жинақталатын болса, онда оның қосындысын табыңыз.

2. Жазылуы k-лық санау жүйесінде қандай да бір $k > 1$ натурал саны үшін k әртүрлі цифрлардан тұратын барлық p жай сандарды табыңыз (бастапқы цифры нөлге тең емес).

3. Кез келген группадағы реті екіге тең екі элементтің көбейтіндісінің квадраты және реті үшке тең екі элементтің көбейтіндісінің кубы коммутаторлар болатынын дәлелдеңіз.

4. P нүктесі $y = x^2$ параболасымен шенелген дөңес облыстың ішінде жатады, бірақ OY осінде жатпайды. Параболаның барлық жанамаларына қатысты P-ның бейнеленуінен туындалған барлық нүктелер жиынын $S(P)$ арқылы белгілейміз.

   а)
$$\max_{(x,y)\in S(P)} y + \min_{(x,y)\in S(P)} y$$
   қосыныдысының мәні P нүктесінің таңдалуына тәуелсіз болатынын дәлелдеңіз.

   б) $\max\limits_{(x,y)\in S(P)} y = 0$ болатындай P нүктесінің геометриялық орнын табыңыз.

5. Әрбір $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ функциясы үшін арқылы $[0,1]$ кесіндісін n бөлікке бірқалыпты бөлшектеуіне сәйкес$s_n(f)$ және $S_n(f)$ f функциясының төменгі және жоғарғы Дарбу қосындаларын белгілейміз. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(f)$ қатары жинақталатындай, ал $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(f)$ қатары жинақталмайтындай интегралданатын f функциясы табылады ма?

6. Математикалық олимпиаданың кейбір қатысушылары жолдастарынан кейбір есептердің шешімдерін көшіріп алды. Қуылғандардың қуылмағандардан көшіріліп алынған шешімдері $\frac{N}{4}$-нен көп болатындай қатысушылардың бір бөлігін ұятпен қууға болатынын дәлелдеңіз. Мұндағы N — көшіріліп алынған шешімдердің жалпы саны.