Республиканская студенческая предметная олимпиада по специальности "Математика"
Астана, 01.04.16
Решения

1. **Какие натуральные числа представимы в виде $x^2-y^2+2x+2y$ для некоторых целых x и y?** (Васильев А.Н.)

   Решение:

   Заметим, что справедливо разложение $x^2-y^2+2x+2y=(x+y)(x-y+2)$. Поэтому натуральное число представимо в этом виде тогда, и только тогда, когда раскладывается на произведение двух множителей одной четности. Ясно, что это все числа, которые дают остаток отличный от 2 при делении на 4.

   Пример для нечетного n: $x=\frac{n-1}{2}$, $y=\frac{3-n}{2}$.

   Пример для n, кратного 4: $x=y=\frac{n}{4}$.

2. **Пусть $\alpha(x)$ — первая цифра после запятой в десятичной записи числа 2^x.**
   а) Докажите, что функция $\alpha(x)$ интегрируема по Риману на $[0,1]$.

   б) Докажите, что $3.5<\int\limits_0^1\alpha(x)dx<4.5$. (Васильев А.Н.)

   Решение:

   а) Легко понять, что функция кусочно–постоянная. Причем количество промежутков постоянства конечно и равно 10. Значит, функция интегрируема по Риману.
   б) Найдем промежуток, на котором первая цифра числа 2^x равна k:

$$1+\frac{k}{10}\le 2^x<1+\frac{k+1}{10},$$

$$\log_2\left(1+\frac{k}{10}\right)\le x<\log_2\left(1+\frac{k+1}{10}\right).$$

   Тогда наш интеграл можно записать в виде суммы:

$$\int\limits_0^1\alpha(x)dx=\sum_{k=0}^{9}k\left(\log_2\left(1+\frac{k+1}{10}\right)-\log_2\left(1+\frac{k}{10}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{9}k\left(\log_2(k+11)-\log_2(k+10)\right)=\sum_{k=0}^{9}k\log_2(k+11)-\sum_{k=0}^{8}(k+1)\log_2(k+11)=$$

$$=9\log_2 20-\sum_{k=0}^{8}\log_2(k+11)=\log_2\frac{20^9}{11*12*...*19}$$

   Требуется доказать, что

$$2^7<\left(\frac{20^9}{11*12*...*19}\right)^2<2^9.$$

   Докажем левую часть неравенства. Заметим, что по неравенству Коши

$$(10+k)*(20-k)<\left(\frac{10+k+20-k}{2}\right)^2=15^2.$$

Отсюда получается оценка слева:

$$\left(\frac{20^9}{11*12*...*19}\right)^2 > \left(\frac{20^9}{15^9}\right)^2 = \frac{2^{36}}{3^{18}}.$$

Остается доказать, что $2^{29} > 3^{18}$. Заметим, что $2^8 > 3^5$ и $2^5 > 3^3$. Перемножив три раза первое неравенство и один раз второе, получим требуемое.

Докажем правую часть неравенства. Заметим, что верно следующее неравенство:

$$(10+k)*(20-k) = 200 + k(10-k) > 200.$$

Значит, оценку справа можно получить так:

$$\left(\frac{20^9}{11*12*...*19}\right)^2 < \left(\frac{400^4*20}{200^4*15}\right)^2 = 2^8\left(\frac{4}{3}\right)^2 < 2^9.$$

3. **В конечном поле произведение всех ненулевых элементов не равно единице. Докажите, что сумма всех элементов поля равна нулю.** (Фольклор)

   Решение:

   1 вариант («наивное»). Можно доказать более общее утверждение:

   В любом конечном поле $F \neq Z_2$ сумма всех элементов равна нулю.

   Пусть F — конечное поле и a_1, a_2, ..., a_n — все его элементы. Если $F \neq Z_2$, то существует элемент a, отличный от нуля и единицы. Тогда aa_1, aa_2, ..., aa_n попарно различны, следовательно

   $$F = \{a_1, ..., a_n\} = \{aa_1, ..., aa_n\}.$$

   Отсюда $S = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n aa_i = aS$, откуда следует, что $S = 0$.

   2 вариант (существенно использующее структуру конечного поля). Утверждение из предыдущего решения можно доказать и по-другому. Ненулевые элементы поля образуют группу по умножению, а порядок элемента группы делит порядок группы (по теореме Лагранжа). Следовательно, любой элемент поля F является корнем многочлена $x^n - x = 0$, где n — количество элементов поля. С другой стороны, по другой теореме Лагранжа, у этого многочлена не более n корней. Иными словами, указанный многочлен имеет своими корнями все элементы поля. Применяя теорему Виета, получаем требуемое.

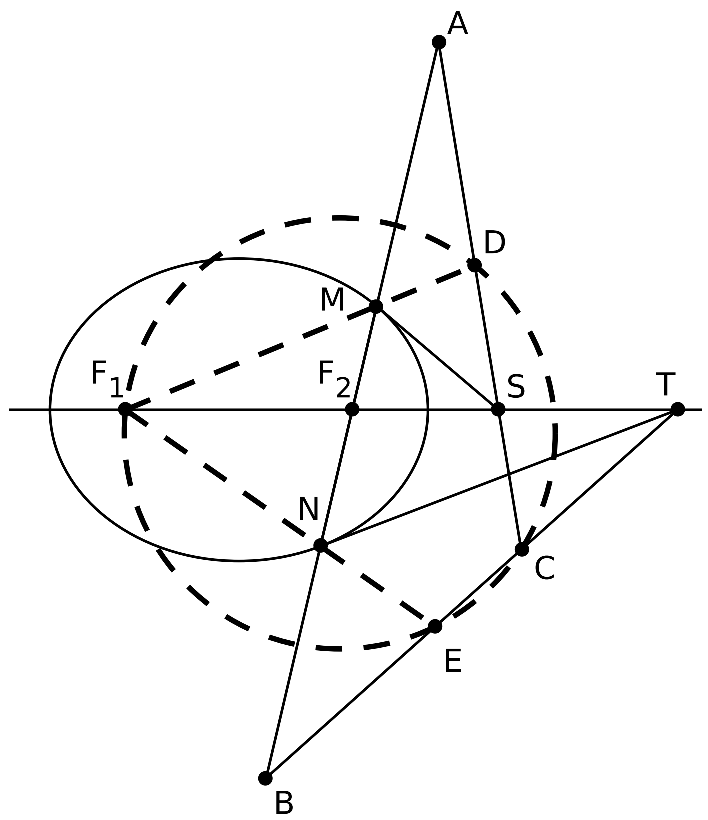
   3 вариант (еще одно решение). У каждого ненулевого элемента x есть обратный x^{-1}, причем $x \neq x^{-1}$ при $x \neq \pm 1$. Следовательно, все ненулевые элементы, кроме ± 1, разбиваются на пары с произведением 1. Поэтому произведение всех элементов поля равно -1. Из условия задачи следует, что $-1 \neq 1$. Следовательно, характеристика поля отлична от 2. Тогда любой ненулевой элемент отличается от своего противоположного, то есть все ненулевые элементы разбиваются на пары с нулевой суммой. Что означает, что сумма всех ненулевых элементов поля равна нулю. Добавление нуля сумму не изменяет. Утверждение доказано.

4. **В эллипсе с фокусами F_1 и F_2 проведена хорда MN, которая проходит через фокус F_2. На прямой F_1F_2 выбраны две точки S и T такие, что прямые SM и TN являются касательными к эллипсу. Точка D симметрична F_2 относительно прямой SM, точка E симметрична F_2 относительно NT. Прямые DS, TE и MN попарно пересекаются в точках A, B и C (точка C не лежит на MN). Докажите, что**
а) CF_2 — медиана треугольника ABC;
б) CF_1 — биссектриса треугольника ABC. (Баев А.Ж.)

Решение:

Факт 1 (оптическое свойство эллипса): луч, направленный из одного фокуса после отражения от внутренней стороы эллипса проходит через другой фокус. То есть $\angle(F_1M, SM) = \angle(SM, F_2M)$, где $\angle(l_1, l_2)$ обозначает ориентированный угол между прямыми. Как следствие, получаем, что $\angle F_1MS + \angle F_2MS = \pi$. По условию, $\angle F_2MS = \angle DMS$. Откуда получаем, что F_1, M, D лежат на одной прямой. Аналогично, F_2, N, E лежат на одной прямой.

Факт 2 (определение эллипса). Сумма расстояний от фокусов до точек на эллипсе постоянна. Как следствие $F_1M + MF_2 = F_1N + NF_2$. Так как треугольники F_2MS и DMS симметричны относительно прямой MS, то и треугольники F_1MF_2 и AMD тоже симметричны и, соответственно, равны. Аналогично, симметричны и равны треугольники F_1NF_2 и BNE.



Докажем пункт а). $AF_2 = AM+MF_2 = F_1M+MF_2 = F_1N+NF_2 = BN+NF_2 = BF_2$. Значит, CF_2 — медиана треугольника ABC.

Докажем пункт б). Заметим, что четырехугольник F_1DCE вписан в окружность, так как $\angle F_1DC + \angle F_1EC = \angle MF_2S + \angle NF_2S = \pi$. К тому же, в нашем четырехугольнике две смежные стороны равны: $F_1D = F_1E$. Следовательно, CF_1 — биссектриса треугольника ABC.

5. **Максималист и минималист по очереди вписывают по одному числу в таблицу размера $n \times n$ (последовательно, строчка за строчкой, слева направо и сверху вниз). Каким окажется ранг получившейся матрицы, если максималист изо всех сил старается его максимизировать, а минималист — минимизировать? (Ответ может зависеть от n и от того, кто делает первый ход.)** (Клячко А.А.)

   1) Рассмотрим случай четного n. Тогда каждый из игроков полностью контролирует $\frac{n}{2}$ столбцов (при этом не имеет значения, кто делает первый ход). Ясно, что Максималист может сделать свои столбцы линейно независимыми и обеспечить ранг матрицы минимум $\frac{n}{2}$. Также ясно, что Минималист может сделать все свои столбцы нулевыми, ограничив ранг матрицы $\frac{n}{2}$.

   Ответ для четного n: $\frac{n}{2}$.

   2) Пусть n нечетно. Тогда, если мы раскрасим клетки таблицы в черный и белый цвета в шахматном порядке, каждый из игроков будет контролировать клетки одного цвета.

   а) Пусть Максималист делает первый ход. Тогда он сможет сделать ранг матрицы максимальным, то есть равным n. Опишем его стратегию. Она состоит в том, что, заполняя очередную диагональную клетку, он следит за тем, чтобы соответствующий главный (угловой) минор был отличен от нуля. Это всегда можно обеспечить, поскольку этот минор разлагается по своей последней строке, а алгебраическое дополнение последнего элемента не равно нулю. Ответ для нечетного n, когда Максималист делает первый ход: n.

   б) Пусть Минималист делает первый ход. Тогда он сможет обеспечить равенство нулю определителя всей матрицы: заполняя очередную диагональную клетку (кроме последней), он следит за тем, чтобы соответствующий угловой минор был отличен от нуля, а в конце обнуляет определитель всей матрицы. Значит, он сможет гарантировать ранг меньше n. С другой стороны, Максималист сможет обеспечить, чтобы минор, полученный вычеркиванием последней строки и первого столбца, был отличен от нуля (аналогично пункту 2 а)). Тем самым, ранг матрицы будет равен по крайней мере $n-1$.

   Ответ для нечетного n, когда Минималист делает первый ход: $n-1$.

6. **Функция $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ дифференцируема на всей области определения. Известно, что**
$$f'(x) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) + f(x)$$
   для всех $x>1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{e^x} = 2$. Докажите, что $f(2) < 20{,}16$. (Баев А.Ж.)

   Решение:

   1 шаг. Подставим в соотношение $x = \frac{t}{t-1}$, где $t>1$. Получим
$$f'\left(\frac{t}{t-1}\right) = f(t) + f\left(\frac{t}{t-1}\right).$$

   Получим свойство:
$$f'\left(\frac{t}{t-1}\right) = f'(t).$$

2 шаг. Продифференцируем исходное соотношение по x.

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} f'\left(\frac{x}{x-1}\right) + f'(x).$$

После замены из свойства, получаем:

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Уравнение интегрируется по частям:

$$f'(x) = Ce^{x+\frac{1}{x-1}}.$$

Добавим условие на бесконечности и найдем $C = 1$:

$$f'(x) = 2e^{x+\frac{1}{x-1}}.$$

3 шаг. Заметим, что если в исходное дифференциальное уравнение мы подставим $x = 2$, то получим $f(2) = \frac{1}{2}f'(2)$. Значит:

$$f(2) = e^3.$$

Осталось доказать, что $e^3 < 20.16$. Заметим, что для проверки этого неравенства грубых оценок типа $e < 3$ или $e < 2.8$ недостаточно, требуется более точная: $e < 2.72$.