Олимпиада по математике Казахстанского филиала МГУ имени М.В.Ломоносова для школьников

Задача 1: Докажите, что если n – натуральное число и число $4^n + 2n + 1$ – простое, то найдется такое целое k, что $n=3^k$.

Задача 2: На поле a1 стоит шахматная фигура. Сколькими способами она может попасть на поле h6, если за один ход она может переместиться либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх?

Задача 3: Докажите, что

$$\frac{1 \times 3 \times \ldots \times 99}{2 \times 4 \times \ldots \times 100} < \frac{1}{10}$$

Задача 4: В прямоугольной таблице стоят натуральные числа. Разрешается одновременно вычесть 1 из всех чисел одной строки или умножить на 2 все числа одного столбца. Докажите, что с помощью этих операций можно получить таблицу из одних нулей.

Задача 5: На плоскости заданы прямая L и две точки A и B. Как следует выбрать на этой прямой точку P, чтобы наибольшее из расстояний AP и BP было минимальным?

Задача 6: Докажите, что n! не делится на 2^n ни при каком натуральном n.

Задача 7: На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты ABMP и BCDK. Докажите, что продолжение медианы BE треугольника ABC является высотой треугольника BMK.

Задача 8: Можно ли расставить натуральные числа от 1 до n в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними?