Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Казахстанский филиал

2022г.

Вариант 1

1. Какое из чисел больше:
$$3,8 \cdot 3,7 + 29 \quad \text{или} \quad \frac{238}{17} + \sqrt{841}?$$

Решение.

Вычислим $3,8 \cdot 3,7 + 29 = 14,06 + 29 = 43,06$. С другой стороны, $\frac{238}{17} + \sqrt{841} = 14 + \sqrt{841} = 14 + 29 = 43$.

Следовательно, $3,8 \cdot 3,7 + 29 > \frac{238}{17} + \sqrt{841}$.

Ответ: Первое число больше.

2. Решите уравнение:
$$5x(x-8) = 3(|x-4| - 4).$$

Решение.

Рассмотрим случай когда $x - 4 \geq 0$. Тогда $|x-4| = x - 4$ и получим систему
$$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ 5x(x-8) = 3((x-4)-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 5x^2 - 43x + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = \frac{3}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 8.$$

Рассмотрим теперь случай когда $x - 4 < 0$. Тогда $|x-4| = -(x-4)$ и получим систему
$$\begin{cases} x - 4 < 0 \\ 5x(x-8) = 3(-(x-4)-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ 5x^2 - 37x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{37}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $0, 8$.

3. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 5^{\frac{x-y}{2}} + 5^x \cdot 5^{-y} = 30, \\ 5^{x+y} + 5 = 30 \cdot 5^y. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим первое уравнение системы
$$5^{\frac{x-y}{2}} + 5^x \cdot 5^{-y} = 30 \ \Leftrightarrow \ 5^{\frac{x-y}{2}} + 5^{x-y} = 30 \ \Leftrightarrow \ 5^{\frac{x-y}{2}} + \left(5^{\frac{x-y}{2}}\right)^2 = 30.$$

Выполним замену $t = 5^{\frac{x-y}{2}}$ и получим уравнение
$$t + t^2 = 30 \ \Leftrightarrow \ t^2 + t - 30 = 0 \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} t = -6 \\ t = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^{\frac{x-y}{2}} = -6 \\ 5^{\frac{x-y}{2}} = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow 5^{\frac{x-y}{2}} = 5 \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = 1.$$

Следовательно,
$$\begin{cases} 5^{\frac{x-y}{2}} + 5^x \cdot 5^{-y} = 30, \\ 5^{x+y} + 5 = 30 \cdot 5^y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 1 \\ 5^{x+y} + 5 = 30 \cdot 5^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 5^{2y+2} + 5 = 30 \cdot 5^y. \end{cases}$$

Решим отдельно второе уравнение системы

$$5^{2y+2}+5=30\cdot 5^y \ \Leftrightarrow\ 25(5^y)^2-30\cdot 5^y+5=0 \ \Leftrightarrow\ 5(5^y)^2-6\cdot 5^y+1=0.$$

Выполним замену $u=5^y$ и получим уравнение

$$5u^2-6u+1=0 \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=\frac{1}{5} \end{array}\right. \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 5^y=1 \\ 5^y=5^{-1} \end{array}\right. \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-1 \end{array}\right. .$$

Следовательно, возвращаясь к последней системе получим

$$\left\{\begin{array}{l} x=y+2 \\ 5^{2y+2}+5=30\cdot 5^y \end{array}\right. \ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{l} x=y+2 \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-1 \end{array}\right. \end{array}\right. \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

Ответ: $(2,0),(1,-1)$.

4. Решите уравнение:

$$\sin^2 7x\cdot\left(\sin 7x\cdot\cos x-\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}\right)=\frac{\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\sin x\cdot\cos 7x}{1+\operatorname{ctg}^2 7x}.$$

Решение.

Область допустимых значений данного уравнения: $\sin 7x\neq 0 \ \Leftrightarrow\ 7x\neq\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Преобразуем уравнение

$$\sin^2 7x\cdot\left(\sin 7x\cdot\cos x-\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}\right)=\frac{\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\sin x\cdot\cos 7x}{1+\operatorname{ctg}^2 7x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin^2 7x\cdot\left(\sin 7x\cdot\cos x-\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}\right)=\sin^2 7x\cdot\left(\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\sin x\cdot\cos 7x\right)$$

$$\Leftrightarrow\sin^2 7x\cdot\left((\sin 7x\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos 7x)-\left(\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sin^2 7x\cdot(\sin 6x-\sin 2x)=0\Leftrightarrow 2\sin^2 7x\cdot\sin 2x\cdot\cos 4x=0 \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} \sin 7x=0 \\ \sin 2x=0 \\ \cos 4x=0 \end{array}\right. .$$

Следовательно, уравнение равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} \sin 7x\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sin 7x=0 \\ \sin 2x=0 \\ \cos 4x=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \sin 7x\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sin 2x=0 \\ \cos 4x=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 7x\neq\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} 2x=\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ 4x=\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

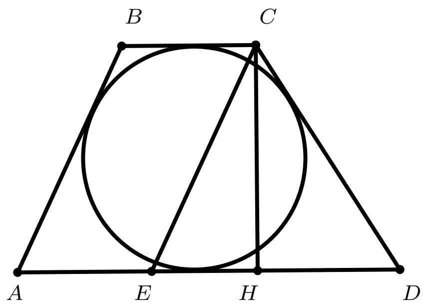
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x\neq\frac{\pi n}{7}, n\in\mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{4}, m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi l, l\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{4}, m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi l, l\in\mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{4}, m\in\mathbb{Z}$.

5. Длины оснований трапеции относятся как $1:3$, а длины боковых сторон как $3:4$. В эту трапецию вписана окружность. Найдите отношение площади круга, ограниченного данной окружностью, к площади трапеции.

Решение.

Пусть $BC = x$, $AD = 3x$, $AB = 3y$, $CD = 4y$. Так как в трапецию вписана окружность, то



$$AB + CD = BC + AD \Rightarrow 3y + 4y = x + 3x \Rightarrow y = \frac{4}{7}x.$$

Следовательно, $BC = x$, $AD = 3x$, $AB = \frac{12}{7}x$, $CD = \frac{16}{7}x$.

Проведем через вершину C прямую, параллельную AB. Пусть E – точка пересечения данной прямой с AD. Тогда $ABCE$ – параллелограмм.

Рассотрим треугольник CED: $CD = \frac{16}{7}x$, $CE = AB = \frac{12}{7}x$, $ED = AD - AE = 3x - x = 2x$. Полупериметр $p = \frac{CD+CE+ED}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{7}x + \frac{12}{7}x + 2x\right) = 3x$.

По формуле Герона

$$S_{CED} = \sqrt{3x\,(3x - 2x)\left(3x - \frac{16}{7}x\right)\left(3x - \frac{12}{7}x\right)} = \frac{3\sqrt{15}}{7}x^2.$$

Пусть CH – высота треугольника CED (высота трапеции). Тогда

$$CH = \frac{2S_{CED}}{ED} = \frac{\frac{6\sqrt{15}}{7}x^2}{2x} = \frac{3\sqrt{15}}{7}x.$$

CH совпадает с диаметром вписанной окружности. Следовательно, радиус окружности

$$r = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2}\frac{3\sqrt{15}}{7}x = \frac{3\sqrt{15}}{14}x.$$

Таким образом,

$$\frac{S_{\text{круга}}}{S_{ABCD}} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}(BC + AD)CH} = \frac{\pi\left(\frac{3\sqrt{15}}{14}x\right)^2}{\frac{1}{2}\cdot 4x \cdot \frac{3\sqrt{15}}{7}x} = \frac{3\sqrt{15}}{56}\pi.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{15}}{56}\pi$.

6. Решите неравенство:

$$2\log_{x-3}(x^2 - 16x + 64) + 2\log_{8-x}(-x^2 + 11x - 24) + \log_{8-x}(x^2 - 6x + 9) > 10.$$

Решение.

$$2\log_{x-3}(x^2 - 16x + 64) + 2\log_{8-x}(-x^2 + 11x - 24) + \log_{8-x}(x^2 - 6x + 9) > 10$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{x-3}(x-8)^2 + 2\log_{8-x}(-(x-3)(x-8)) + \log_{8-x}(x-3)^2 > 10$$

$$\Leftrightarrow 4\log_{x-3}|x-8| + 2\log_{8-x}|x-3| + 2\log_{8-x}|x-8| + 2\log_{8-x}|x-3| > 10$$

$$\Leftrightarrow 4\log_{x-3}(8-x) + 2\log_{8-x}(x-3) + 2\log_{8-x}(8-x) + 2\log_{8-x}(x-3) > 10$$

$$\Leftrightarrow 4\log_{x-3}(8-x) + 4\log_{8-x}(x-3) - 8 > 0 \;\Leftrightarrow\; \log_{x-3}(8-x) + \log_{8-x}(x-3) - 2 > 0.$$

Сделаем замену $t = \log_{x-3}(8-x)$, тогда $\log_{8-x}(x-3) = \frac{1}{\log_{x-3}(8-x)} = \frac{1}{t}$.

Получаем неравенство:

$$t+\frac{1}{t}-2>0 \Leftrightarrow \frac{t^2-2t+1}{t}>0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} t>0 \\ t\neq 1 \end{cases}$$

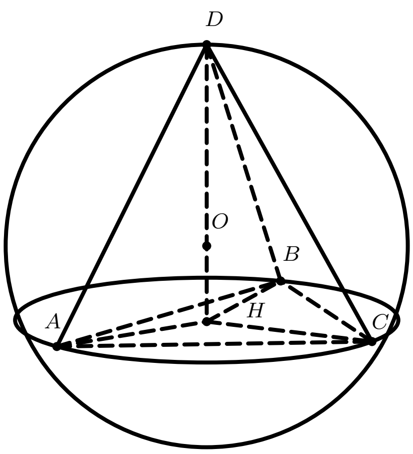
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{x-3}(8-x)>0 \\ \log_{x-3}(8-x)\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3>1 \\ 8-x>1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x-3<1 \\ 0<8-x<1 \end{cases} \end{array} \right. \\ \log_{x-3}(8-x)\neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>4 \\ x<7 \end{cases} \\ \begin{cases} 3<x<4 \\ 7<x<8 \end{cases} \end{array} \right. \\ x-3\neq 8-x \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x>4 \\ x<7 \end{cases} \\ x\neq \frac{11}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 4<x<7 \\ x\neq \frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4<x<\frac{11}{2} \\ \frac{11}{2}<x<7 \end{array} \right. .$$

Ответ: $\left(4,\frac{11}{2}\right)\cup\left(\frac{11}{2},7\right)$.

7. Все вершины треугольной пирамиды $ABCD$ лежат на одной сфере. Известно, что $AB=AC=8$, $BC=8\sqrt{3}$ и $AD=BD=CD=17$. Найдите радиус сферы.

Решение.



Пусть DH – высота пирамиды. Прямоугольные треугольники DHA, DHB, DHC равны, поскольку их гипотенузы равны и DH – общий катет. Следовательно, $AH=BH=CH$, т.е. H – центр описанной около треугольника ABC окружности.

Пусть R – радиус сферы и O – центр сферы. Опустим из точки O перпендикуляр на плоскость треугольника ABC. Пусть H_1 – основание данного перпендикуляра. Прямоугольные треугольники OH_1A, OH_1B, OH_1C равны, поскольку их гипотенузы равны $OA=OB=OC=R$ и OH_1 – общий катет. Следовательно, $AH_1=BH_1=CH_1$, т.е. H_1 – центр описанной около треугольника ABC окружности. Значит, $H=H_1$ и точки D,O,H лежат на одной прямой.

В треугольнике ABC полупериметр $p=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)=\frac{1}{2}(8+8+8\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}$. По формуле Герона, $S_{ABC}=\sqrt{(8+4\sqrt{3})\cdot 4\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}\cdot(8-4\sqrt{3})}=16\sqrt{3}$. Радиус описанной около ABC окружности $CH=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S_{ABC}}=\frac{8\cdot 8\cdot 8\sqrt{3}}{4\cdot 16\sqrt{3}}=8$.

В треугольнике DHC $DH=\sqrt{CD^2-CH^2}=\sqrt{289-64}=15$.

В треугольнике OHC $CH=8$, $OC=R$, $OH=DH-OD=15-R$. Следовательно,

$$64+(15-R)^2=R^2 \Leftrightarrow 289-30R=0 \Leftrightarrow R=\frac{289}{30}.$$

Ответ: $\frac{289}{30}$.

8. Найдите все значения a, при каждом из которых у неравенств

$$x^2-4\leq 4a(x-2) \quad \text{и} \quad x^2+a^2<a(2x+1)$$

нет ни одного общего решения.

Решение.

Рассмотрим первое неравенство

$$x^2-4\le 4a(x-2)\Leftrightarrow x^2-4ax+8a-4\le 0.$$

Пусть $f(x)=x^2-4ax+8a-4$. Дискриминант

$$D=(-4a)^2-4(8a-4)=16a^2-32a+16=16(a^2-2a+1)=16(a-1)^2.$$

Корни уравнения $f(x)=0$:

$$x_{1,2}=\frac{4a\pm\sqrt{16(a-1)^2}}{2}=\frac{4a\pm 4|a-1|}{2}=2,4a-2.$$

Множеством решений неравенства $f(x)\le 0$ является отрезок $[x_1,x_2]$, где $\left\{\begin{array}{l} x_1=2\\ x_2=4a-2\end{array}\right.$ при $a>1$, $\left\{\begin{array}{l} x_1=4a-2\\ x_2=2\end{array}\right.$ при $a<1$, при $a=1$ отрезок $[x_1,x_2]$ вырождается в точку $\{2\}$.

Рассмотрим неравенство

$$x^2+a^2<a(2x+1)\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2-a<0.$$

Пусть $g(x)=x^2-2ax+a^2-a$, $D_g=4a^2-4(a^2-a)=4a$ – дискриминант $g(x)$, $x_{\text{в}}=-\frac{-2a}{2}=a$ – абсцисса вершины параболы - графика $g(x)$.

Тогда неравенство $g(x)<0$ не имеет решения на отрезке $[x_1,x_2]$ тогда и только тогда, когда

$$\left\{\begin{array}{l} g(x_1)\ge 0\\ g(x_2)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l} D_g\le 0\\ \left\{\begin{array}{l} D_g>0\\ x_{\text{в}}\notin[x_1,x_2]\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(2)\ge 0\\ g(4a-2)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l} a\le 0\\ \left\{\begin{array}{l} a>0\\ f(x_{\text{в}})>0\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2-5a+4\ge 0\\ 9a^2-13a+4\ge 0\\ \left[\begin{array}{l} a\le 0\\ \left\{\begin{array}{l} a>0\\ f(a)>0\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (a-1)(a-4)\ge 0\\ 9\left(a-\frac{4}{9}\right)(a-1)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l} a\le 0\\ \left\{\begin{array}{l} a>0\\ -3a^2+8a-4>0\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a\le 1\\ a\ge 4\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} a\le \frac{4}{9}\\ a\ge 1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} a\le 0\\ \left\{\begin{array}{l} a>0\\ 3(a-2)\left(a-\frac{2}{3}\right)<0\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a\le \frac{4}{9}\\ a=1\\ a\ge 4\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} a\le 0\\ \left\{\begin{array}{l} a>0\\ \frac{2}{3}<a<2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a\le \frac{4}{9}\\ a=1\\ a\ge 4\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} a\le 0\\ \frac{2}{3}<a<2\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\le 0\\ a=1\end{array}\right. .$$

Ответ: $(-\infty,0]\cup\{1\}$.