Задания вступительного испытания по математике

1. Пусть $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$. Вычислите $f\left(\frac{7}{2}\right)$.

2. Через первую трубу бассейн наполняется (от пустого до полного) за 10 часов, через вторую – за 15 часов. За сколько часов наполнится этот бассейн, если открыть одновременно обе трубы? (Скорости поступления воды через каждую трубу считать постоянными.)

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4\cos x + \cos 2y = -2 + 4\sin^2 x \\ 2\sin y - 2\cos x = 1 \end{cases}$$

4. Решите неравенство:

$$3 + \frac{1}{\log_{64}\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \log_{\frac{x}{2}}\left(34x - \frac{8}{x}\right).$$

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD. Известно, что $AB = 6$, $AC = \sqrt{34}$, $AD = 4$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$a^2x^2 + \sqrt{x^2 - 5x + 4} = a(2\sqrt{7} - 4)x + 4\sqrt{7} - 11$$

имеет хотя бы одно решение.

Решения

1. Пусть $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$. Вычислите $f\left(\frac{7}{2}\right)$.

Решение.

$$f\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2-3\cdot\frac{7}{2}+2}{\left(\frac{7}{2}\right)^2-4\cdot\frac{7}{2}+3}=\frac{\frac{49}{4}-\frac{21}{2}+2}{\frac{49}{4}-14+3}=\frac{\frac{49-42+8}{4}}{\frac{49}{4}-11}=\frac{\frac{15}{4}}{\frac{49-44}{4}}=\frac{\frac{15}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{15}{4}\cdot\frac{4}{5}=3.$$

Ответ: 3.

2. Через первую трубу бассейн наполняется (от пустого до полного) за 10 часов, через вторую – за 15 часов. За сколько часов наполнится этот бассейн, если открыть одновременно обе трубы? (Скорости поступления воды через каждую трубу считать постоянными.)

Решение. Возьмем объем бассейна равным 1. Обозначим производительности 1 и 2 труб (скорости заполнения бассейна трубами) v_1 и v_2. Тогда $v_1=\frac{1}{10}$, $v_2=\frac{1}{15}$. Общая производительность обеих труб: $v_1+v_2=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3+2}{30}=\frac{1}{6}$. Следовательно, время заполнения бассейна обеими трубами

$$t=\frac{1}{v_1+v_2}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6.$$

Ответ: 6 часов.

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}4\cos x+\cos 2y=-2+4\sin^2 x\\ 2\sin y-2\cos x=1\end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases}4\cos x+\cos 2y=-2+4\sin^2 x\\ 2\sin y-2\cos x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=\sin y-\frac{1}{2}\\ 4\cos x+\cos 2y=-2+4(1-\cos^2 x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=\sin y-\frac{1}{2}\\ 4\cos x+\cos 2y=2-4\cos^2 x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=\sin y-\frac{1}{2}\\ 4\left(\sin y-\frac{1}{2}\right)+\cos 2y=2-4\left(\sin y-\frac{1}{2}\right)^2\end{cases}$$

$$4\left(\sin y-\frac{1}{2}\right)+\cos 2y=2-4\left(\sin y-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$4\sin y-2+1-2\sin^2 y=2-4\left(\sin^2 y-\sin y+\frac{1}{4}\right)$$

$$2\sin^2 y=2$$

$$\sin^2 y=1$$

.

$$\begin{cases}\cos x=\sin y-\frac{1}{2}\\ 4\left(\sin y-\frac{1}{2}\right)+\cos 2y=2-4\left(\sin y-\frac{1}{2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=\sin y-\frac{1}{2}\\ \sin^2 y=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin y=\pm1\\ \cos x=\sin y-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin y=1\\ \cos x=\sin y-\frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin y=-1\\ \cos x=\sin y-\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin y=1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin y=-1\\ \cos x=-\frac{3}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin y=1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,n\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k,n\in\mathbb{Z}$.

4. Решите неравенство:

$$3+\frac{1}{\log_{64}\left(\frac{x}{2}\right)}\le\log_{\frac{x}{2}}\left(34x-\frac{8}{x}\right).$$

Решение.

$$3+\frac{1}{\log_{64}\left(\frac{x}{2}\right)}\le\log_{\frac{x}{2}}\left(34x-\frac{8}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3+\log_{\frac{x}{2}} 64 \le \log_{\frac{x}{2}}\left(34x-\frac{8}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{x}{2}}\left(34x-\frac{8}{x}\right)-\log_{\frac{x}{2}} 64 \ge 3$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{34x-\frac{8}{x}}{64}\right) \ge 3$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{17x}{32}-\frac{1}{8x}\right) \ge 3$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{17x}{32}-\frac{1}{8x}\right) \ge \log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{2}>1 \\ \frac{17x}{32}-\frac{1}{8x} \ge \left(\frac{x}{2}\right)^3 \\ \left(\frac{x}{2}\right)^3>0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0<\frac{x}{2}<1 \\ \frac{17x}{32}-\frac{1}{8x} \le \left(\frac{x}{2}\right)^3 \\ \frac{17x}{32}-\frac{1}{8x}>0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>2 \\ 17x-\frac{4}{x} \ge 4x^3 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0<x<2 \\ 17x-\frac{4}{x} \le 4x^3 \\ 17x-\frac{4}{x}>0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>2 \\ 17x^2-4 \ge 4x^4 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0<x<2 \\ 17x^2-4 \le 4x^4 \\ 17x^2-4>0 \end{array}\right. \end{array}\right. \quad (1)$$

$$17x^2-4 \ge 4x^4 \Leftrightarrow 4x^4-17x^2+4 \le 0.$$

Замена $t=x^2$.

$$4t^2-17t+4 \le 0.$$

$$4t^2-17t+4=0$$

$$D=289-64=225$$

$$t_{1,2}=\frac{17\pm 15}{8}=\left[\begin{array}{l} 4 \\ \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

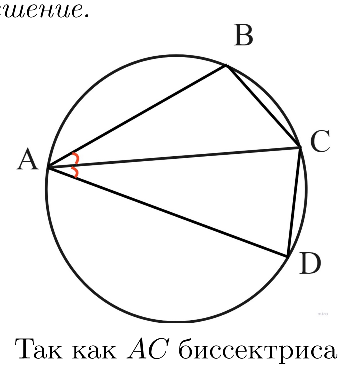
$$4t^2-17t+4 \le 0 \Leftrightarrow 4(t-4)\left(t-\frac{1}{4}\right) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le t \le 4.$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>2 \\ \frac{1}{4} \le x^2 \le 4 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0<x<2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 \le \frac{1}{4} \\ x^2 \ge 4 \end{array}\right. \\ 17x^2-4>0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ \left\{\begin{array}{l} 0<x<2 \\ x^2 \le \frac{1}{4} \\ x^2>\frac{4}{17} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0<x<2 \\ x \le \frac{1}{2} \\ x>\frac{2}{\sqrt{17}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{17}}<x \le \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{\sqrt{17}};\frac{1}{2}\right]$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD. Известно, что $AB=6$, $AC=\sqrt{34}$, $AD=4$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

Решение.



Так как AC биссектриса, то $\angle BAC=\angle DAC$. По свойству вписанных в окружность углов $BC=CD$.

Поскольку четырехугольник вписан в окружность, то $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$. Пусть $\angle ABC=\alpha$, тогда $\angle ADC=180^\circ-\alpha$.

Пусть $BC=CD=x$. Применим теорему косинусов в треугольниках ABC и ACD.

$$\left\{\begin{array}{l} AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cos\angle ABC \\ AC^2=AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cos\angle ADC \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 36+x^2-12x\cos\alpha=34 \\ 16+x^2-8x\cos(180^\circ-\alpha)=34 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36+x^2-12x\cos\alpha=34 \\ 16+x^2+8x\cos\alpha=34 \end{cases} \Rightarrow 36+\frac{3}{2}\cdot 16+x^2+\frac{3}{2}x^2=34+\frac{3}{2}\cdot 34 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x^2=25 \Leftrightarrow x=\sqrt{10}.$$

Таким образом, $BC=CD=\sqrt{10}$.

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cos\angle ABC \Leftrightarrow 36+10-12\sqrt{10}\cos\alpha=34$$
$$\Leftrightarrow 12\sqrt{10}\cos\alpha=12 \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Следовательно, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=9.$$
$$S_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot CD\sin\angle ADC=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{10}\cdot\sin(180^\circ-\angle ABC)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=6.$$
$$A_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=9+6=15.$$

Ответ: 15.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$a^2x^2+\sqrt{x^2-5x+4}=a(2\sqrt{7}-4)x+4\sqrt{7}-11$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Перепишем уравнение

$$a^2x^2+\sqrt{x^2-5x+4}=a(2\sqrt{7}-4)x+4\sqrt{7}-11 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{x^2-5x+4}=-a^2x^2+a(2\sqrt{7}-4)x+4\sqrt{7}-11. \tag{1}$$

Рассмотрим отдельно случай $a=0$. Уравнение принимает вид

$$\sqrt{x^2-5x+4}=4\sqrt{7}-11.$$

$$\begin{aligned} &4\sqrt{7}-11\vee 0 \Leftrightarrow \\ &4\sqrt{7}\vee 11 \Leftrightarrow \\ &112\vee 121. \end{aligned}$$

Таким образом, $4\sqrt{7}-11<0$ и уравнение (1) при $a=0$ не имеет решений.

Рассмотрим случай $a\neq 0$. В этом случае выражение, находящееся в правой части уравнения (1) представляет собой квадратный трехчлен. Найдем нули данного трехчлена.

$$-a^2x^2+a(2\sqrt{7}-4)x+4\sqrt{7}-11=0.$$
$$D=(a(2\sqrt{7}-4))^2+4a^2(4\sqrt{7}-11)=a^2(28-16\sqrt{7}+16)+4a^2(4\sqrt{7}-11)=0.$$

Следовательно,

$$x_1=x_2=-\frac{a(2\sqrt{7}-4)}{-2a^2}=\frac{\sqrt{7}-2}{a}$$

и верно равенство

$$-a^2x^2+a(2\sqrt{7}-4)x+4\sqrt{7}-11=-a^2\left(x-\frac{\sqrt{7}-2}{a}\right)^2=-(ax-(\sqrt{7}-2))^2.$$

Следовательно,

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-5x+4}=-(ax-(\sqrt{7}-2))^2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4=0 \\ -(ax-(\sqrt{7}-2))^2=0 \end{cases}$$

Решим первое уравнение

$$x^2-5x+4=0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \left[\begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array}\right. .$$

Решим относительно a второе уравнение

$$-(ax - (\sqrt{7} - 2))^2 = 0$$

$$ax - (\sqrt{7} - 2) = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{7} - 2}{x}.$$

Следовательно,

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ -(ax - (\sqrt{7} - 2))^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \end{array}\right. \\ a = \frac{\sqrt{7}-2}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ a = \frac{\sqrt{7}-2}{4} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ a = \sqrt{7} - 2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}-2}{4}$, $\sqrt{7} - 2$.