

ВАРИАНТ ф11.

1. Удовлетворяет ли число  $\frac{3}{5}$  неравенству:  $\sqrt{\frac{1}{3} - x^2} \geq 0$ ?
2. Найдите наименьшее общее кратное чисел 45, 312 и 325.
3. Решите уравнение:

$$(2x^2 - x + 5) \cdot |\sin x| = (x^2 + 5x - 3) \cdot \sin x.$$

4. Решите неравенство:

$$2 \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) + \frac{\log_3(x^2 - x + 2)}{\log_9 4} \geq 1.$$

5. В треугольнике  $ABC$  со сторонами  $AB = 4$ ,  $BC = 6$  и  $AC = 7$  проведены биссектрисы  $AK$ ,  $BL$  и  $CM$ . Найдите отношение площади треугольника  $BKM$  к площади треугольника  $CKL$ .

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство

$$|2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x + a| \leq 5$$

выполняется для любых значений  $x$ .

1. Удовлетворяет ли число  $\frac{3}{5}$  неравенству:  $\sqrt{\frac{1}{3} - x^2} \geq 0$ ?

Решение:

$$\text{Так как } \frac{1}{3} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{9}{25} = \frac{25-27}{75} = -\frac{2}{75} < 0,$$

то  $x = \frac{3}{5}$  не входит в область допустимых значений.

Ответ: нет.

2. Найдите наименьшее общее кратное чисел 45, 312 и 325.

Решение:

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$$

$$312 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$$

$$325 = 5 \cdot 5 \cdot 13 = 5^2 \cdot 13$$

$$\text{НОК}(45; 312; 325) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13 = 10^2 \cdot 18 \cdot 13 = \\ = 23400$$

Ответ: 23400

3. Решите уравнение:

$$(2x^2 - x + 5) \cdot |\sin x| = (x^2 + 5x - 3) \cdot \sin x.$$

Решение:

Рассмотрим три случая:

$$1) \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2)  $\sin x > 0 \Rightarrow |\sin x| = \sin x$  и уравнение можно сократить на  $\sin x \neq 0$ .  $\Rightarrow$

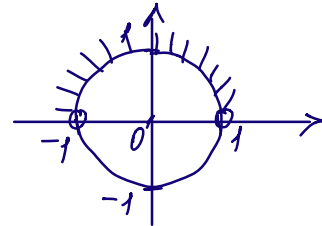
$$2x^2 - x + 5 = x^2 + 5x - 3 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Пак как  $\sin x > 0$ ,

$$\frac{\pi}{2} < 2 < \pi, \text{ а } \pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$$

( $\pi \approx 3,14$ ), то  $\sin 2 > 0$ , а  $\sin 4 < 0 \Rightarrow$  решением в этом случае является  $x = 2$ .



3)  $\sin x < 0 \Rightarrow |\sin x| = -\sin x$  и уравнение можно сократить на  $\sin x \neq 0$ .  $\Rightarrow$

$$-2x^2 + x - 5 = x^2 + 5x - 3 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 4x + 2 = 0$$

$D = 16 - 24 < 0 \Rightarrow$  в этом случае решений нет.

Ответ:  $x = 2, x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

4. Решите неравенство:

$$2 \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + \frac{\log_3(x^2 - x + 2)}{\log_9 4} \geq 1.$$

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x^2 - x + 2 > 0 \end{cases}$$

$D = 1 - 8 < 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 > 0$  для всех  $x$ .

$$\Rightarrow \begin{array}{c} | \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline x \end{array} \Rightarrow x \in (2; +\infty).$$

$$2 \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + \frac{\log_3(x^2-x+2)}{\log_3 4} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$-2 \log_2(x-2) + \frac{\log_3(x^2-x+2)}{\frac{1}{2} \cdot 2 \log_3 2} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$-2 \log_2(x-2) + \frac{\log_3(x^2-x+2)}{\log_3 2} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$-2 \log_2(x-2) + \log_2(x^2-x+2) \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$-2 \log_2(x-2) \geq 1 - \log_2(x^2-x+2) \quad | \div (-1) \Leftrightarrow$$

$$2 \log_2(x-2) \leq \log_2(x^2-x+2) - 1 \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x-2)^2 \leq \log_2(x^2-x+2) - 1 \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x^2-4x+4) \leq \log_2(x^2-x+2) - \log_2 2 \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x^2-4x+4) \leq \log_2 \frac{x^2-x+2}{2} \Leftrightarrow$$

$$x^2-4x+4 \leq \frac{x^2-x+2}{2} \quad | \cdot 2 \Leftrightarrow$$

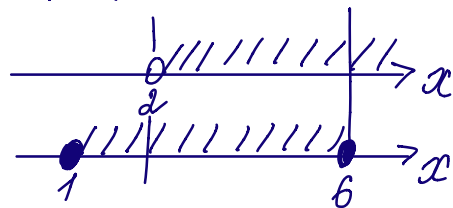
$$2x^2-8x+8 \leq x^2-x+2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-7x+6 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 6$$

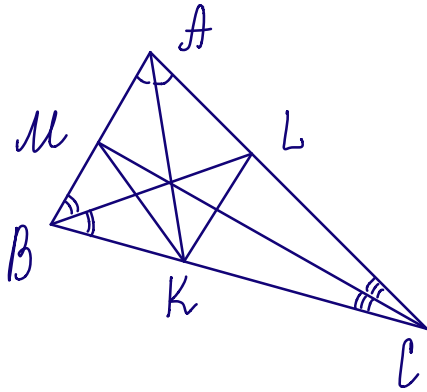
Учитывая ОДЗ:  $x > 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 < x \leq 6$$

Ответ:  $x \in (2; 6]$ .



5. В треугольнике  $ABC$  со сторонами  $AB = 4$ ,  $BC = 6$  и  $AC = 7$  проведены биссектрисы  $AK$ ,  $BL$  и  $CM$ . Найдите отношение площади треугольника  $BKM$  к площади треугольника  $CKL$ .



Дано:  $\triangle ABC$

$$AB=4, BC=6, AC=7$$

$AK, BL, CM$  - биссектрисы

Найти:  $\frac{S_{\triangle BKM}}{S_{\triangle CKL}}$

Решение: Обозначим  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle ACB = \gamma$ . Тогда

$$S_{\triangle BKM} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot BM \cdot \sin \beta$$

$$S_{\triangle CKL} = \frac{1}{2} \cdot CK \cdot CL \cdot \sin \gamma. \text{ Тогда}$$

$$\frac{S_{\triangle BKM}}{S_{\triangle CKL}} = \frac{BK}{CK} \cdot \frac{BM}{CL} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

По свойству биссектрисы:  $\frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{7}$ .

По теореме синусов:  $\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin \beta} \Rightarrow$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{S_{\triangle BKM}}{S_{\triangle CKL}} = \frac{4}{7} \cdot \frac{BM}{CL} \cdot \frac{7}{4} = \frac{BM}{CL}$$

По свойству биссектрисы:  $\frac{BM}{MA} = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{7}$  и

$$\frac{CL}{LA} = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow MA = \frac{7}{6} BM \text{ и } BM + MA = 4$$

$$\Rightarrow BM = \frac{24}{13} \text{ и } LA = \frac{2}{3} CL, LA + CL = 7 \Rightarrow CL = \frac{21}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{S_{\Delta BKM}}{S_{\Delta CKL}} = \frac{BK}{CL} = \frac{24 \cdot 5}{13 \cdot 21} = \frac{40}{91}.$$

Ответ:  $\frac{40}{91}$ .

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство

$$|2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x + a| \leq 5$$

выполняется для любых значений  $x$ .

Решение:

$$|2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x + a| \leq 5 \Leftrightarrow$$

Используя формулы:  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$  и

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Получаем:

$$|(1 + \cos 2x) + 2 \sin 2x - (2 - 2 \cos 2x) + a| \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$|3 \cos 2x + 2 \sin 2x + a - 1| \leq 5 \Leftrightarrow$$

Воспользуемся методом введения дополнительного угла:  $3 \cos 2x + 2 \sin 2x$  разделим на  $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{13}} \cos 2x + \frac{2}{\sqrt{13}} \sin 2x.$$

Обозначим  $\frac{3}{\sqrt{13}} = \cos \varphi$ ,  $\frac{2}{\sqrt{13}} = \sin \varphi \Rightarrow$

$$\cos \varphi \cdot \cos 2x + \sin \varphi \sin 2x = \cos(2x - \varphi) \Rightarrow$$

$$3 \cos 2x + 2 \sin 2x = \sqrt{13} \cdot \cos(2x - \varphi) \Rightarrow$$

$$|\sqrt{13} \cdot \cos(2x - \varphi) + a - 1| \leq 5$$

Функция  $\cos(2x-4)$  принимает значения из промежутка  $[-1; 1]$ , тогда  $\sqrt{13} \cdot \cos(2x-4)$  — из  $[-\sqrt{13}; \sqrt{13}]$ , а  $\sqrt{13} \cdot \cos(2x-4) + a - 1$  — из промежутка  $[a-1-\sqrt{13}; a-1+\sqrt{13}]$ .

По условию задачи требуется, чтобы весь этот промежуток содержался внутри промежутка  $[-5; 5]$ .

Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два неравенства:

$$\begin{cases} a-1-\sqrt{13} \geq -5, \\ a-1+\sqrt{13} \leq 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -4+\sqrt{13} \\ a \leq 6-\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$-4+\sqrt{13} \leq a \leq 6-\sqrt{13}$$

Ответ:  $[-4+\sqrt{13}; 6-\sqrt{13}]$