

ВАРИАНТ ф12.

1. Вычислите: $\left(\frac{17}{6} + 2^{200}\right) - \left(\frac{27}{10} + 4^{100}\right)$.

2. Найдите все целые числа, удовлетворяющие неравенству:

$$\sqrt[6]{z+1} < \sqrt[8]{8-z}.$$

3. Решите уравнение:

$$\sin 2x - 5 \sin x = 3 \operatorname{tg} x.$$

4. Решите неравенство:

$$\log_3(x^2) - 2 \cdot \log_{3x} 9 \leq 5.$$

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AM и BN , пересекающиеся в точке O . Известно, что отрезок MN имеет длину 2 см, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки M , N и O . Найдите углы и стороны треугольника MNO .

6. Найдите все пары значений параметров (a, b) , для каждой из которых система уравнений:

$$\begin{cases} x^3 - 7x + a = 0, \\ x^2 - 3x + b = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы 2 различных решения (относительно x).

1. Вычислите: $\left(\frac{17}{6} + 2^{200}\right) - \left(\frac{27}{10} + 4^{100}\right)$.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{17}{6} + 2^{200} - \left(\frac{27}{10} + 4^{100}\right) &= \frac{17}{6} + 2^{200} - \frac{27}{10} - 2^{200} = \\ &= \frac{17}{6} - \frac{27}{10} = \frac{85-81}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2}{15}$.

2. Найдите все целые числа, удовлетворяющие неравенству:

$$\sqrt[6]{z+1} < \sqrt[8]{8-z}.$$

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} z+1 \geq 0 \\ 8-z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \geq -1 \\ z \leq 8 \end{cases} \Rightarrow z \in [-1; 8].$$

Можем возвести обе части в 24-ую степень.

$$\Rightarrow (z+1)^4 < (8-z)^3$$

↑
возрастает
на ОДЗ

↓
убывает
на ОДЗ

$$\begin{aligned} \text{При } z = -1 &\Rightarrow (-1+1)^4 = 0 \\ (8-(-1))^3 &= 9^3 = 729 \Rightarrow 0 < 729 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{При } z = 0 &\Rightarrow (0+1)^4 = 1 \\ (8-0)^3 &= 8^3 = 512 \Rightarrow 1 < 512 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{При } z = 1 &\Rightarrow (1+1)^4 = 2^4 = 16 \\ (8-1)^3 &= 7^3 = 343 \Rightarrow 16 < 343 \end{aligned}$$

$$\text{При } x=2 \Rightarrow \begin{aligned} (2+1)^4 &= 3^4 = 81 \\ (8-2)^3 &= 6^3 = 216 \end{aligned} \Rightarrow 81 < 216$$

$$\text{При } x=3 \Rightarrow \begin{aligned} (3+1)^4 &= 4^4 = 256 \\ (8-3)^3 &= 5^3 = 125 \end{aligned} \Rightarrow 256 > 125$$

Поэтому неравенству удовлетворяют целые числа $-1, 0, 1, 2$.

Ответ: $-1, 0, 1, 2$.

3. Решите уравнение:

$$\sin 2x - 5 \sin x = 3 \operatorname{tg} x.$$

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin 2x - 5 \sin x = 3 \frac{\sin x}{\cos x} \quad | \cdot \cos x \Rightarrow$$

$$\sin 2x \cdot \cos x - 5 \sin x \cdot \cos x = 3 \sin x \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \\ &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

$$2 \sin x \cdot \cos^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x - 3 \sin x = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x (2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 & (1) \\ 2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2): 2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 = 7^2$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = 3 \end{cases} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}, \text{ т.к. } \cos x \in [-1; 1].$$

$$\Rightarrow x = \pm (\pi - \arccos \frac{1}{2}) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Оба решения удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

4. Решите неравенство:

$$\log_3(x^2) - 2 \cdot \log_{3x} 9 \leq 5.$$

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 > 0 \\ 3x > 0 \\ 3x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \\ x \in (0; +\infty) \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$$

$$\log_3(x^2) - 2 \log_{3x} 9 \leq 5 \Rightarrow$$

$$2 \log_3 x - 2 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 3x} \leq 5 \Rightarrow$$

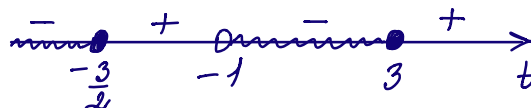
$$2 \log_3 x - \frac{4}{\log_3 3 + \log_3 x} \leq 5 \Rightarrow$$

$$2 \log_3 x - \frac{4}{1 + \log_3 x} \leq 5$$

$$\text{Замена: } \log_3 x = t \Rightarrow 2t - \frac{4}{1+t} \leq 5 \Rightarrow$$

$$\frac{2t + 2t^2 - 4 - 5 - 5t}{1+t} \leq 0 \Rightarrow \frac{2t^2 - 3t - 9}{1+t} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2(t-3)(t+\frac{3}{2})}{1+t} \leq 0$$



$$\log_a b =$$

$$= \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

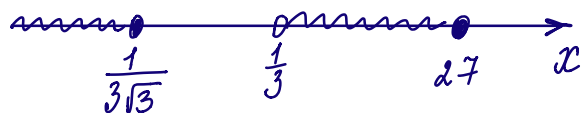
$$\log_a(b \cdot c) =$$

$$= \log_a b + \log_a c$$

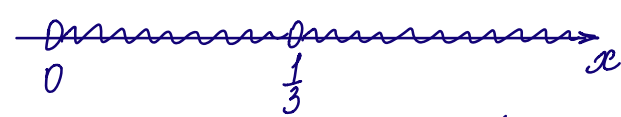
$$\Rightarrow t \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup (-1; 3] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3 x \leq -\frac{3}{2} \\ -1 < \log_3 x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3^{-3/2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} < x \leq 27 \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ: $x \in (0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty) \Rightarrow$



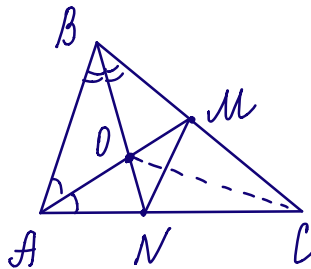
$$\Rightarrow x \in (0; \frac{1}{3\sqrt{3}}] \cup (\frac{1}{3}; 27].$$

ОДЗ: 

Ответ: $x \in (0; \frac{1}{3\sqrt{3}}] \cup (\frac{1}{3}; 27].$

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AM и BN , пересекающиеся в точке O . Известно, что отрезок MN имеет длину 2 см, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки M , N и O . Найдите углы и стороны треугольника MNO .

Решение:

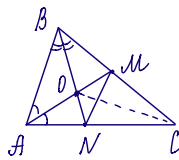


$\triangle ABC$,
 BN, AM - биссектрисы
 $MN = 2$.

Обозначим $\angle BAC = 2\alpha \Rightarrow \angle BAO = \angle OAC = \alpha$
 $\angle ABC = 2\beta \Rightarrow \angle ABO = \angle CBO = \beta \Rightarrow$
 $\angle BOA = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, т.к. $\angle BOA$ и $\angle MON$ - вертикал.
 $\Rightarrow \angle BOA = \angle MON = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, а
 $\angle ACB = 180^\circ - (2\alpha + 2\beta)$.

Так как точки M, N, O, C лежат на окр-ти, то четырёхугольник $MONC$ явл-ся вписанным в окр-ть,

след-но $\angle MON + \angle ACB = 180^\circ \Rightarrow$



$$180^\circ - \alpha - \beta + 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha + 3\beta = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\alpha + \beta = 60^\circ \Rightarrow \angle MON = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \text{ и }$$

$$\angle ACB = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ.$$

Соединим точку C с точкой O, получим CO-биссектриса
 $\angle ACO = \angle BCO = 30^\circ$

П.к. $\angle OMN$ и $\angle OCN$ вписанные углы, опирающ. на одну и ту же хорду $ON \Rightarrow \angle OMN = \angle OCN = 30^\circ$,
 аналогично, $\angle ONM = \angle OCM = 30^\circ \Rightarrow ON = OM \Rightarrow$
 $\triangle MON$ - равнобедренный.

По т. синусов $\frac{MN}{\sin 120^\circ} = \frac{ON}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}/2} = \frac{ON}{1/2} \Rightarrow$

$$ON = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow OM = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 2, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

6. Найдите все пары значений параметров (a, b) , для каждой из которых система уравнений:

$$\begin{cases} x^3 - 7x + a = 0, \\ x^2 - 3x + b = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы 2 различных решения (относительно x).

Решение: Пусть $f(x) = x^3 - 7x + a$,
 $g(x) = x^2 - 3x + b$.

Поделим многочлен $f(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 7x + a & x^2 - 3x + b \\ - (x^3 - 3x^2 + bx) & \\ \hline 3x^2 - 7x - bx + a & \\ - (3x^2 - 9x + 3b) & \\ \hline 2x - bx - 3b + a & \end{array}$$

Остаток $h(x) = 2x - bx - 3b + a$

$$f(x) = g(x) \cdot (x+3) + h(x) \Rightarrow h(x) = f(x) - g(x) \cdot (x+3)$$

Пусть x_0 - решение системы, т.е. $f(x_0) = 0$ и $g(x_0) = 0$

$\Rightarrow h(x_0) = 0 - 0 \cdot (x+3) = 0 \Rightarrow (2-b)x - 3b + a = 0$ - это уравнение должно иметь хотя бы два различных решения.

Это возможно тогда и только тогда, когда

$$2-b=0 \text{ и } 3b-a=0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a=6, \text{ т.е. } (0 \cdot x = 0).$$

При $b=2$ ур-ие $x^2 - 3x + 2 = 0$ имеет два корня

$x=1$ и $x=2$. Эти корни удовлетворяют

$$\text{ур-ию } x^3 - 7x + 6 = 0$$

$$\begin{array}{lcl} 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0 & \text{и} & 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = 0 \\ 0 = 0 & & 8 - 14 + 6 = 0 \\ & & 0 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow a=6 \text{ и } b=2.$$

Ответ: $a=6$; $b=2$.