

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Казахстанский филиал

Вступительное испытание по математике
Пособие для поступающих
в Казахстанский филиал МГУ

Астана
2025

УДК 51
ББК 22.1
В85

Рекомендовано к печати Ученым советом

Казахстанского филиала МГУ имени М.В.Ломоносова

Рецензенты: профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики Казахстанского филиала МГУ имени М. В. Ломоносова Е. Д. Нурсултанов; профессор кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова А. А. Клячко.

Авторы пособия: преподаватели кафедры фундаментальной и прикладной математики и кафедры математического моделирования Казахстанского филиала МГУ имени М. В. Ломоносова

**Баев Ален Жуматаевич,
Васильев Антон Николаевич,
Галиева Нургуль Кадыржановна,
Муканов Асхат Бирлесович.**

Вступительное испытание по математике. Пособие для поступающих в Казахстанский филиал МГУ. – Астана: типография «Раритет», 2025 – 164 с.

ISBN 978-601-82231-6-7

Данное пособие предназначено для поступающих в Казахстанский филиал МГУ, учителей и выпускников средних школ. В пособии содержатся подробные решения задач, предложенных абитуриентам на вступительном экзамене по математике в 2011–2024 годах.

TeX-верстка: **Баев А.Ж., Муканов А.Б.**

ISBN 978-601-82231-6-7

УДК 51
ББК 22.1

©Тексты решений, оригинал-макет:
Баев А.Ж., Васильев А.Н., Галиева Н.К., Муканов А.Б. 2025

©Тексты условий:
ЦПК МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025

Дорогие абитуриенты!

Московский университет — старейший и крупнейший университет России, один из ведущих университетов мира. Он внес огромный вклад в развитие мировой науки, образования и культуры и является одним из престижных университетов мира.

Казахстанский филиал МГУ — структурное подразделение Московского университета на территории Республики Казахстан. Филиал создан по инициативе Первого Президента Республики Казахстан Н.А. Назарбаева.

В Казахстанском филиале МГУ создана уникальная система образования, которая гарантирует высокое качество обучения студентов. Это достигается как полным соблюдением учебных программ Московского университета в Филиале, так и тем, что учебный процесс в Филиале обеспечивается в основном профессорами и преподавателями МГУ. Ежегодно более 120 профессоров и преподавателей МГУ командированы Московским университетом в Филиал для чтения лекций и проведения семинаров. В 2015 году введено в эксплуатацию новое комфортабельное общежитие — Дом студентов МГУ. В 2022 году по поручению Президента Республики Казахстан Токаева К.-Ж. К. Филиалу был предоставлен новый учебный корпус, который в скором времени примет наших студентов.

Все студенты Филиала на старших курсах обучаются в МГУ и получают диплом об окончании Московского университета. На время обучения в Москве им предоставляются места в общежитиях МГУ.

Выпускники Казахстанского филиала трудоустроены. Они работают в различных ведомствах, институтах и национальных компаниях Республики Казахстан, успешно занимаются бизнесом.

Приглашаем поступать в Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Директор
Казахстанского филиала
МГУ имени М.В. Ломоносова,
профессор

А.В. СИДОРОВИЧ

Содержание

1	ВВЕДЕНИЕ	6
1.1	Экзамен по математике	6
1.2	Программа экзамена и предъявляемые требования	7
1.3	Литература	9
1.4	Электронные ресурсы	10
2	УСЛОВИЯ	11
2.1	2011 год	11
2.2	2012 год	13
2.3	2013 год	15
2.4	2014 год	17
2.5	2015 год	19
2.6	2016 год	21
2.7	2017 год	23
2.8	2018 год	25
2.9	2019 год	27
2.10	2020 год	29
2.11	2021 год	31
2.12	2022 год	34
2.13	2023 год	36
2.14	2024 год	38
3	РЕШЕНИЯ	41
3.1	2011 год	41
3.2	2012 год	50
3.3	2013 год	59
3.4	2014 год	67
3.5	2015 год	77
3.6	2016 год	84
3.7	2017 год	94
3.8	2018 год	104
3.9	2019 год	114
3.10	2020 год	120
3.11	2021 год	125
3.12	2022 год	131
3.13	2023 год	140
3.14	2024 год	150

4	ОТВЕТЫ	158
4.1	2011 год	158
4.2	2012 год	158
4.3	2013 год	158
4.4	2014 год	159
4.5	2015 год	159
4.6	2016 год	159
4.7	2017 год	160
4.8	2018 год	160
4.9	2019 год	160
4.10	2020 год	161
4.11	2021 год	161
4.12	2022 год	161
4.13	2023 год	162
4.14	2024 год	162

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день невозможно представить нашу жизнь без научно-технического прогресса. Наука играет важнейшую роль практически во всех областях человеческой деятельности, являясь её фундаментом. Также верно и то, что современная наука немыслима без математики: математические методы все больше и больше проникают в те её сферы, в которых какую-нибудь сотню-другую лет назад с ними были абсолютно незнакомы. Это и общественные науки, и медицина, и даже лингвистика. Поэтому неудивительно, что в МГУ имени М.В. Ломоносова — флагмане фундаментального образования на постсоветском пространстве — без знания математики невозможно поступить практически ни на один факультет. Без её успешного освоения невозможно формирование полноценного специалиста.

Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова на сегодня имеет пять факультетов: механико-математический, факультет вычислительной математики и кибернетики, экономический, географический и филологический. На три из них для поступления необходимо успешно сдать экзамен по математике.

Экзамен по математике

Вступительный экзамен по математике Казахстанского филиала проводится в письменной форме. Продолжительность экзамена составляет 4 часа. Максимальная оценка за экзамен — 100 баллов. Вариант состоит из восьми задач различной сложности: задача на арифметические преобразования, четыре задачи на стандартные алгебраические приемы, одна алгебраическая задача повышенной сложности и по одной задаче на планиметрию и стереометрию. Каждая задача оценивается по следующей шкале:

- $\boxed{+}$ — полное решение, подробные выкладки, абсолютно верный ответ;
- $\boxed{\pm}$ — полное решение с неполными выкладками или арифметической ошибкой, которая не влияет на дальнейший ход решения;
- $\boxed{\mp}$ — неполное решение, которое содержит некоторые случаи из правильного решения, или решение с арифметической ошибкой, которая существенно меняет дальнейший ход решения;
- $\boxed{-}$ — неверное решение, отсутствие продвижений за исключением тривиальных.

Объем знаний и степень владения материалом, описанные в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться арсеналом средств из этого курса, включая и начала анализа. Однако для решения экзаменационных задач достаточно уверенного владения

лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающими, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать.

Программа экзамена и предъявляемые требования

Понятия, которыми должен владеть абитуриент:

1. Натуральные числа. Делимость. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.
2. Целые, рациональные и действительные числа.
3. Формулы сокращенного умножения.
4. Квадратные уравнения. Дискриминант. Теорема Виета.
5. Квадратные неравенства. Парабола.
6. Проценты.
7. Модуль числа.
8. Дробно-рациональные уравнения и неравенства. Метод интервалов.
9. Степень, корень, арифметический корень.
10. Уравнения и неравенства, содержащие радикалы.
11. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
12. Координатная плоскость. Уравнение прямой и окружности.
13. Синус, косинус, тангенс, котангенс угла. Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.
14. Тригонометрический круг.
15. Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения аргумента. Формулы двойных углов. Формулы синуса (косинуса, тангенса, котангенса) суммы и разности. Формулы суммы синусов (косинусов, тангенсов и котангенсов). Формулы произведения синусов (косинусов).
16. Логарифм.

17. Функция, ее область определения и область значений. Возрастание, убывание, периодичность, четность, нечетность. Наибольшее и наименьшее значения функции. График функции.
18. Уравнение, неравенство, система. Решения (корни) уравнения, неравенства, системы. Равносильность.
19. Задачи с параметром.
20. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота и их свойства.
21. Прямоугольный треугольник и его свойства. Теорема Пифагора.
22. Формулы площади треугольников.
23. Теорема синусов. Теорема косинусов.
24. Квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция и их свойства.
25. Правильный многоугольник.
26. Окружность и круг. Касательная, секущая, хорда. Круговой сектор и сегмент. Центральные и вписанные углы.
27. Вписанные и описанные четырехугольники и их свойства.
28. Прямая и плоскость в пространстве. Двугранный угол. Трехгранный угол. Теорема о трех перпендикулярах.
29. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.
30. Цилиндр, конус, шар, сфера.
31. Площадь поверхности и объем тетраэдра, цилиндра, конуса, шара.

На экзамене по математике поступающий должен уметь:

1. выполнять без калькулятора действия над числами и числовыми выражениями;
2. преобразовывать буквенные выражения;
3. сравнивать числа и находить их приближенные значения без калькулятора;
4. доказывать тождества и неравенства для буквенных выражений;

5. решать уравнения, неравенства, системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения;
6. исследовать функции; строить графики функций и множества точек на координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами;
7. пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий;
8. пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические, тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объемы;
9. изображать геометрические фигуры на чертеже;
10. делать дополнительные построения;
11. применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду;
12. пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей, свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур;
13. составлять уравнения, неравенства и находить значения величин, исходя из условия задачи;
14. излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.

Литература

Рекомендуемая литература для подготовки к вступительному экзамену:

1. Будаков А.Б., Щедрин Б.М. Элементарная математика: Методические указания к ответам на теоретические вопросы билетов устного экзамена по математике. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова, 2007.
2. Разгулин А.В., Федотов М.В. Алгебра: Учебно-методическое пособие. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова, 2007.
3. Воронин В.П., Федотов М.В. Геометрия: Учебно-методическое пособие. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова, 2006.

4. Ткачук В.В. Математика абитуриенту. — М.: МЦНМО, 2007.
5. Куланин Е.Д., Норин В.П., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. 3000 конкурсных задач по математике. — М.: Айрис-пресс, 2003.

Электронные ресурсы

Следующие электронные ресурсы будут полезны для ознакомления с вариантами, предложенными в разные годы в различных подразделениях МГУ:

- Официальный сайт Центральной приемной комиссии МГУ:
<http://cpk.msu.ru/>
- Официальный сайт Приемной комиссии мехмата МГУ:
<http://pk.math.msu.ru/ru/specialist/variant>

Желаем успехов!

УСЛОВИЯ

2011 год

1 вариант

1. Какие из чисел $2, \frac{3}{4}, \sqrt{7} + 2, \sqrt{7} - 2$ являются корнями уравнения

$$4x^3 + 9 = 19x^2?$$

2. Представьте число $\sqrt{33}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,1.
3. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) - \sin(\pi + 4x) = \sin 4x + \sin x.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^x \cdot 32^y = 256, \\ \sqrt{2x - 2} = y. \end{cases}$$

5. В арифметической прогрессии 34 члена, и разность этой прогрессии равна 12. Сумма всех членов прогрессии в 4 раза больше, чем сумма членов, стоящих на нечетных местах. Найдите первый член этой прогрессии.
6. В трапеции, описанной около окружности радиуса 4, разность длин боковых сторон равна 4, а длина средней линии равна 12. Найдите длины сторон трапеции.
7. Решите неравенство

$$\frac{\log_2(x+6) \cdot \log_5(x+5)}{x+4} \leq \frac{\log_5(x+6) \cdot \log_2(x+5)}{x+3}.$$

8. В пирамиде $ABCD$: $AB = 1$, $AC = 2$, $AD = 3$, $BC = \sqrt{5}$, $BD = \sqrt{10}$, $CD = \sqrt{13}$. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $ABCD$.

2 вариант

1. Какие из чисел 2 , $-\frac{2}{3}$, $\sqrt{5} + 3$, $\sqrt{5} - 3$ являются корнями уравнения

$$3x^3 = 16x^2 - 8?$$

2. Представьте число $\sqrt{39}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,1.

3. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) + \sin(\pi - 3x) = \sin 3x - \cos x.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8^x \cdot 64^y = 128, \\ \sqrt{12y - 7} = x. \end{cases}$$

5. В арифметической прогрессии 26 членов, и разность этой прогрессии равна 15. Сумма всех членов прогрессии в 5 раз больше, чем сумма членов, стоящих на нечетных местах. Найдите первый член этой прогрессии.

6. В трапеции, описанной около окружности радиуса 6, разность длин боковых сторон равна 4, а длина средней линии равна 15. Найдите длины сторон трапеции.

7. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(x-3) \cdot \log_4(x-4)}{x-5} \leq \frac{\log_4(x-3) \cdot \log_3(x-4)}{x-6}.$$

8. В пирамиде $ABCD$: $AB = 1$, $AC = 3$, $AD = 4$, $BC = \sqrt{10}$, $BD = \sqrt{17}$, $CD = 5$. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $ABCD$.

2012 год

1 вариант

1. Определите, какие из чисел являются целыми, и вычислите эти целые числа:

а) $\frac{19}{7} + \frac{7}{5} - \frac{4}{35}$;

б) $\sqrt{22} \cdot \sqrt{33} \cdot \sqrt{6}$;

в) $\frac{2,9 \cdot 3,4}{4,93}$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + 24} = 6 - x^2.$$

3. Решите уравнение

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 |\cos x + \sin x| = \frac{\pi^2}{4} (\cos x + \sin x).$$

4. В арифметической прогрессии десятый член больше пятого члена на 15 и больше второго члена в 13 раз. Найдите сумму всех членов этой прогрессии, начиная с сотого члена и заканчивая двухсотым.

5. Решите неравенство

$$\log_7 x \leq 5 + 2 \log_{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{7}\right).$$

6. В выпуклом шестиугольнике все углы равны 120° и четыре последовательные стороны имеют длины 2, 3, 3, 4. Найдите площадь шестиугольника.

7. Найдите все значения, которые принимает функция

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 1}.$$

8. Кусок сыра в форме правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина пирамиды) разрезали одним плоским разрезом, который проходит через ребро AB и делит ребро SC в отношении 1 : 3, считая от вершины S . Найдите отношение объемов полученных кусков сыра.

2 вариант

1. Определите, какие из чисел являются целыми, и вычислите эти целые числа:

а) $\frac{11}{3} + \frac{9}{11} + \frac{17}{33}$;

б) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{35} \cdot \sqrt{10}$;

в) $\frac{3,1 \cdot 3,8}{5,89}$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + 12} = 8 - x^2.$$

3. Решите уравнение

$$\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 |\cos x - \sin x| = \frac{\pi^2}{4} (\cos x - \sin x).$$

4. В арифметической прогрессии девятый член больше четвертого члена на 10 и больше третьего члена в 5 раз. Найдите сумму всех членов этой прогрессии, начиная с двухсотого члена и заканчивая трехсотым.

5. Решите неравенство

$$3 \log_{\sqrt{x}} 11 \leq 8 + 2 \log_{11} \left(\frac{1}{x}\right).$$

6. В выпуклом шестиугольнике все углы равны 120° и четыре последовательные стороны имеют длины 4, 5, 5, 6. Найдите площадь шестиугольника.

7. Найдите все значения, которые принимает функция

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 - x + 1}.$$

8. Кусок сыра в форме правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина пирамиды) разрезали одним плоским разрезом, который проходит через ребро AB и делит ребро SC в отношении $2 : 3$, считая от вершины S . Найдите отношение объемов полученных кусков сыра.

2013 год

1 вариант

1. Докажите, что число

$$\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[6]{3}\right)^3 \cdot \left(9 + 5\sqrt{3}\right)$$

является целым и найдите это целое число.

2. Решите неравенство

$$\frac{13 \cdot |x + 2| - 5}{2 \cdot |x + 2| + 1} < 4.$$

3. Решите уравнение

$$2 + \cos(\pi + 9x) = 5 \sin \frac{\pi - 9x}{2}.$$

4. В возрастающей арифметической прогрессии произведение седьмого и восьмого членов на 46 больше, чем произведение пятого и девятого членов, и на 108 больше, чем произведение третьего и десятого членов. Чему равна сумма первых 25 членов этой прогрессии?

5. Решите неравенство

$$(18 - 3x) \cdot \log_{2^x - 12} \sqrt[3]{2} \leq 1.$$

6. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 20, а длина боковой стороны CD равна $10\sqrt{3}$. Через точки A , B , C проходит окружность, пересекающая основание трапеции AD в точке F . Угол AFB равен 60° . Найдите длину отрезка BF .

7. Произведение двух натуральных чисел уменьшили на 26. Результат разделили на сумму исходных натуральных чисел с остатком. В частном получили 5, а в остатке 60. Найдите исходные натуральные числа.

8. Квадрат $ABCD$ со стороной 3 см является основанием двух пирамид $MABCD$ и $NABCD$, причем MA и NC — высоты этих пирамид и точки M , N лежат по одну сторону от плоскости $ABCD$. Сумма длин высот MA и NC равна 9 см, а объем общей части пирамид равен 6 см^3 . Найдите отношение высот MA и NC .

2 вариант

1. Докажите, что число

$$\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[6]{2}\right)^3 \cdot (20 + 14\sqrt{2})$$

является целым и найдите это целое число.

2. Решите неравенство

$$\frac{11 \cdot |x + 3| - 6}{6 \cdot |x + 3| + 5} < 1.$$

3. Решите уравнение

$$\cos(11x - \pi) = 4 + 7 \sin \frac{\pi - 11x}{2}.$$

4. В возрастающей арифметической прогрессии произведение шестого и седьмого членов на 44 больше, чем произведение четвертого и восьмого членов, и на 104 больше, чем произведение второго и девятого членов. Чему равна сумма первых 23 членов этой прогрессии?

5. Решите неравенство

$$(6 - 2x) \cdot \log_{3x-6} \sqrt{3} \leq 1.$$

6. В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны CD равна 6. Через точки A , B , C проходит окружность, пересекающая основание трапеции AD в точке F . Длина отрезка BF равна $6\sqrt{2}$. Угол AFB равен 45° . Найдите длину основания AD .

7. Произведение двух натуральных чисел уменьшили на 25. Результат разделили на сумму исходных натуральных чисел с остатком. В частном получили 4, а в остатке 50. Найдите исходные натуральные числа.

8. Квадрат $ABCD$ со стороной 6 см является основанием двух пирамид $MABCD$ и $NABCD$, причем MA и NC — высоты этих пирамид и точки M , N лежат по одну сторону от плоскости $ABCD$. Сумма длин высот MA и NC равна 8 см, а объем общей части пирамид равен 18 см^3 . Найдите отношение высот MA и NC .

2014 год

1 вариант

1. К какому целому числу находится ближе всего на числовой оси число

$$\frac{5,1 \cdot 4,2 + 11,76}{2,3 \cdot 2,2 - 2,46}?$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{41 - 6x - x^2}}{3 - x} = 1.$$

3. Решите уравнение

$$6 \sin^2 3x + 2 \cos^2 6x = 5.$$

4. Даны арифметическая прогрессия, в которой разность отлична от 0, и геометрическая прогрессия. Известно, что 1-й, 2-й и 10-й члены арифметической прогрессии совпадают, соответственно, со 2-м, 5-м и 8-м членами геометрической прогрессии. Найдите отношение суммы 8 первых членов геометрической прогрессии к сумме 8 первых членов арифметической прогрессии.

5. Решите неравенство

$$\log_{x^2} \left(5x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{32}{3} \right)^2 \leq 2.$$

6. Высота AH и биссектриса BL в треугольнике ABC пересекаются в точке K . При этом $AK = 4$, $KH = 2$, $BL = 11$. Найдите длину стороны BC .

7. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$a(x^2 + x^{-2}) - (a + 1)(x + x^{-1}) + 5 = 0$$

не имеет решений.

8. В треугольной пирамиде $ABCD$ суммы трех плоских углов при каждой из вершин B и C равны 180° и $AD = BC$. Длина высоты пирамиды, опущенной из вершины A , равна 40 см. Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

2 вариант

1. К какому целому числу находится ближе всего на числовой оси число

$$\frac{7,2 \cdot 3,1 + 10,14}{3,2 \cdot 2,1 - 4,52}?$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{22 - 4x - x^2}}{2 - x} = 1.$$

3. Решите уравнение

$$7 \sin^2 5x + \cos^2 10x = 2.$$

4. Даны арифметическая прогрессия, в которой разность отлична от 0, и геометрическая прогрессия. Известно, что 2-й, 3-й и 11-й члены арифметической прогрессии совпадают, соответственно, с 1-м, 4-м и 7-м членами геометрической прогрессии. Найдите отношение суммы 9 первых членов геометрической прогрессии к сумме 9 первых членов арифметической прогрессии.

5. Решите неравенство

$$\log_{x^2} \left(2x^2 + \frac{13}{2}x - \frac{15}{2} \right)^2 \leq 2.$$

6. Высота CH и биссектриса BL в треугольнике ABC пересекаются в точке K . При этом $CK = 8$, $KH = 4$, $BL = 18$. Найдите длину стороны AB .

7. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$a(x^2 + x^{-2}) - (a + 2)(x + x^{-1}) + 7 = 0$$

не имеет решений.

8. В треугольной пирамиде $ABCD$ суммы трех плоских углов при каждой из вершин B и D равны 180° и $AC = BD$. Радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен 3 см. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины A .

2015 год

1 вариант

1. Какое из чисел больше и почему: 4,5 или $\sqrt{\frac{21}{8}} + \frac{17}{6}$?

2. Решите уравнение

$$(x^2 - 8x + 16)(x^2 - 8x + 18) - 24 = 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{24} \cos x = \sqrt{11 \cos x - \cos 2x}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 + 2xy = 40x, \\ 16x^2 + 8xy = 5y. \end{cases}$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\log_{25} \left(7 - \frac{x}{2}\right)}{\log_{125}(22 - x)} \leq \frac{3}{4}.$$

6. В треугольнике длины двух сторон равны 4 и 5, а длина биссектрисы угла между этими сторонами равна $\frac{20}{9}$. Найдите площадь этого треугольника.

7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(x+1)^4 - (a+3)(x^2+2x) + a^2 + 3a + 1 = 0$$

имеет 4 различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

8. В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной S и основанием $ABCDEF$ площадь сечения SAC относится к площади боковой грани SAB как $\sqrt{51} : \sqrt{19}$. Сторона основания равна 3. Найти объем данной шестиугольной пирамиды.

2 вариант

1. Какое из чисел больше и почему: 5,5 или $\sqrt{\frac{20}{7}} + \frac{23}{6}$?

2. Решите уравнение

$$(x^2 - 7x + 16)(x^2 - 7x + 19) - 28 = 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{20} \sin x = \sqrt{9 \sin x + \cos 2x}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2y^2 + xy = 15x, \\ 5x^2 + 10xy = 12y. \end{cases}$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\log_{64} \left(5 + \frac{x}{2} \right)}{\log_{16} (18 + x)} \leq \frac{1}{3}.$$

6. В треугольнике длины двух сторон равны 8 и 3, а длина биссектрисы угла между этими сторонами равна $\frac{24}{11}$. Найдите площадь этого треугольника.

7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(x - 1)^4 - (a + 4)(x^2 - 2x) + a^2 + 5a + 5 = 0$$

имеет 4 различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

8. В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной S и основанием $ABCDEF$ площадь сечения SAC относится к площади боковой грани SAB как $\sqrt{37} : \sqrt{13}$. Сторона основания равна 2. Найти объем данной шестиугольной пирамиды.

2016 год

1 вариант

1. Сколько различных решений имеет уравнение

$$7x^2 + 6x + 7 = 2\sqrt{10} \cdot (x^2 - 1)?$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ x^3 - y^3 = 335. \end{cases}.$$

3. Дана квадратная таблица 10×10 клеток (10 строк, 10 столбцов). В каждой клетке таблицы стоит число. Известно, что при переходе из любой клетки в соседнюю с ней клетку, расположенную ниже, число увеличивается на 4, а при переходе из любой клетки в соседнюю с ней клетку справа число уменьшается на 1. Сумма всех чисел в таблице равна 250. Какое число стоит в самой левой клетке нижнего ряда?

4. Решите неравенство

$$\sqrt{7 + 2^{\log_x 5}} \geq 1 + 4^{\log_x \sqrt{5}}.$$

5. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x = 9 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x.$$

6. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AD в $\sqrt{\frac{19}{4}}$ раз длиннее стороны BC и $AB = CD = 2$. Продолжения сторон AB (за точку B) и DC (за точку C) пересекаются в точке K , при этом $BK = 1$, $CK = 2$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

7. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\cos \frac{(10x - 48)\pi}{3x + 5} = 1.$$

8. В правильной треугольной пирамиде радиус вписанного шара в 3 раза короче высоты и равен $7 + \sqrt{21}$. Найдите радиус шара, который касается всех ребер пирамиды.

2 вариант

1. Сколько различных решений имеет уравнение

$$9x^2 + 4x + 9 = \sqrt{77} \cdot (1 - x^2)?$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 342. \end{cases}.$$

3. Дана квадратная таблица 8×8 клеток (8 строк, 8 столбцов). В каждой клетке таблицы стоит число. Известно, что при переходе из любой клетки в соседнюю с ней клетку, расположенную ниже, число уменьшается на 2, а при переходе из любой клетки в соседнюю с ней клетку справа число увеличивается на 3. Сумма всех чисел в таблице равна 160. Какое число стоит в самой правой клетке верхнего ряда?

4. Решите неравенство

$$\sqrt{31 + 5^{\log_x 3}} \geq 1 + 25^{\log_x \sqrt{3}}.$$

5. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x = 6 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x.$$

6. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AD в $\sqrt{\frac{23}{12}}$ раз длиннее стороны BC и $AB = CD = 1$. Продолжения сторон AB (за точку B) и DC (за точку C) пересекаются в точке K , при этом $BK = 2$, $CK = 3$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

7. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\cos \frac{(4x - 50)\pi}{3x + 7} = 1.$$

8. В правильной треугольной пирамиде радиус вписанного шара в 3 раза короче высоты и равен $\sqrt{21} + 3$. Найдите радиус шара, который касается всех ребер пирамиды.

2017 год

1 вариант

1. Найдите все целые числа, которые лежат между числами $\sqrt{3} \cdot \sqrt{85}$ и $\frac{14-1,7}{3-2,3}$.

2. Решите уравнение $|x^2 - 14x + 48| = 14x - 42 - x^2$.

3. В 9 коробках с номерами от 1 до 9 лежат только красные и синие шары. Число красных шаров во второй коробке в $\frac{7}{6}$ раз больше, чем в первой. Количество красных шаров в коробках образуют арифметическую прогрессию, а количества синих шаров в коробках образуют геометрическую прогрессию (в порядке номеров коробок). Количество синих шаров в первой коробке составляет 25%, а в третьей — 50% от числа всех шаров в данной коробке. Найти отношение общего числа синих шаров к общему числу красных шаров.

4. Решите уравнение

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\log_y x} = \frac{y^2}{x}, \\ (\log_3 x^2) \cdot \log_x \left(2x - \frac{3}{y}\right) = 4 \end{cases}$$

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle C = 60^\circ$, $AD = 21$, $BC = 40$. Окружность с центром на стороне BC касается сторон AB , AD и CD . Найдите длины сторон AB и CD .

7. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$13 + \sin^2 x > 3a^2 - a + (4a - 5) \cos x$$

выполняется для всех x .

8. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ (S — вершина пирамиды) вписан шар. Через центр шара и ребро AB проведена плоскость, которая в пересечении с пирамидой дает четырехугольник $ABMN$. Объемы пирамид $SABMN$ и $SABCD$ относятся как 5 : 9. Найдите косинус двугранного угла между боковой гранью и основанием исходной пирамиды.

2 вариант

1. Найдите все целые числа, которые лежат между числами $\sqrt{5} \cdot \sqrt{39}$ и $\frac{15-2,6}{2-1,2}$.

2. Решите уравнение $|x^2 - 15x + 56| = 15x - 52 - x^2$.

3. В 10 коробках с номерами от 1 до 10 лежат только красные и синие шары. Число красных шаров во второй коробке в $\frac{5}{4}$ раз больше, чем в первой. Количество красных шаров в коробках образуют арифметическую прогрессию, а количества синих шаров в коробках образуют геометрическую прогрессию (в порядке номеров коробок). Количество синих шаров в первой коробке составляет 20%, а в третьей — 40% от числа всех шаров в данной коробке. Найти отношение общего числа синих шаров к общему числу красных шаров.

4. Решите уравнение

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{y^2} \cdot x^{\log_y x} = x, \\ (\log_2 x^3) \cdot \log_x (5x - 6y) = 9 \end{cases}$$

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $AD = 24$, $BC = 13$. Окружность с центром на стороне AD касается сторон AB , BC и CD . Найдите длины сторон AB и CD .

7. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$11 + \cos^2 x > 3a^2 + 5a - (4a - 1) \sin x$$

выполняется для всех x .

8. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ (S — вершина пирамиды) вписан шар. Через центр шара и ребро AB проведена плоскость, которая в пересечении с пирамидой дает четырехугольник $ABMN$. Объемы пирамид $SABMN$ и $SABCD$ относятся как 7 : 25. Найдите косинус двугранного угла между боковой гранью и основанием исходной пирамиды.

2018 год

1 вариант

1. Какое целое число задано выражением $\frac{\sqrt{8} \cdot (\frac{5}{3} + \frac{1}{5})}{(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}) \cdot \sqrt{32}}$?

2. Решить уравнение:

$$\sqrt{10x + 6} = 5x - 9.$$

3. Решить неравенство:

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{x}} \leq \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3-x}}.$$

4. В геометрической прогрессии 50 членов (все положительные). Если просуммировать логарифмы по основанию 2 от каждого члена прогрессии, то получится 1325. Если вычислить сумму логарифмов по основанию 2 только первых 30 членов, то получится 495. Вычислите сумму первых 10 членов прогрессии.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5 \sin y - 3\sqrt{5} \cos x = 7 - 2 \cos^2 y, \\ \operatorname{tg} x = 2. \end{cases}$$

6. В треугольнике ABC со сторонами: $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$ проведены высоты AH_1 , BH_2 , CH_3 . Найдите отношение длин отрезков $H_1H_3 : H_2H_3$.

7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$|(2-a)x - a| = (2-a)(x+1)^2 + 2ax - 2x + 2a$$

имеет ровно одно решение.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ длины всех ребер одинаковы. Точка M в пространстве такова, что $MA = MB = MC = \sqrt{3}$ см и прямая AM пересекается с высотой треугольника SBC , опущенной из вершины B . Найдите объем пирамиды $SABC$.

2 вариант

1. Какое целое число задано выражением $\frac{\sqrt{48} \cdot (\frac{4}{3} - \frac{1}{7})}{(\frac{1}{3} + \frac{1}{7}) \cdot \sqrt{12}}$?

2. Решить уравнение:

$$\sqrt{14 - 5x} = 5x - 8.$$

3. Решить неравенство:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2-x}} \leq \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{3}{x}}.$$

4. В геометрической прогрессии 40 членов (все положительные). Если просуммировать логарифмы по основанию 2 от каждого члена прогрессии, то получится 900. Если вычислить сумму логарифмов по основанию 2 только первых 20 членов, то получится 250. Вычислите сумму первых 10 членов прогрессии.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 \cos y - 4\sqrt{10} \cos x = 4 - 2 \sin^2 y, \\ \operatorname{tg} x = 3. \end{cases}$$

6. В треугольнике ABC со сторонами: $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 7$ проведены высоты AH_1 , BH_2 , CH_3 . Найдите отношение длин отрезков $H_1H_3 : H_2H_3$.

7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$|(1-a)x - 2a| = (1-a)(x+2)^2 + 2ax + 4a + 2$$

имеет ровно одно решение.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ длины всех ребер одинаковы. Точка M в пространстве такова, что $MA = MB = MC = 3$ см и прямая AM пересекается с высотой треугольника SBC , опущенной из вершины B . Найдите объем пирамиды $SABC$.

2019 год

1 вариант

1. Найдите целое число, которое задается выражением:

$$(\sqrt{10} + \sqrt{7})^2 \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{7})^2.$$

2. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль, а из B в A в тот же момент по той же дороге выехал автобус. Они ехали без остановок с постоянными скоростями. На весь путь автомобиль затратил 2 часа, а автобус 3 часа. Через сколько минут после выезда они встретились?

3. Решите уравнение:

$$(x^2 + 8x - 5)^2 = (x + 1)(x + 7).$$

4. Решите уравнение:

$$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) + 8\cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = 6 - 3\sin x.$$

5. Трапеция площади 150 см^2 , в которой есть углы 90° и 150° , описана около окружности. Найдите радиус окружности.

6. Решите неравенство:

$$1 + \sqrt{15 - \log_x 3} \cdot \log_3(x^7) \geq \log_3(x^{25}).$$

7. Решите уравнение:

$$2^{\frac{7x+4}{x+3}} - 2^{\frac{8-3x}{x+3}} = 6.$$

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота в 2 раза меньше, чем сторона основания. На боковых ребрах SA , SB , SC выбраны точки M , N , K соответственно так, что $SM : MA = 3 : 1$, $SN : NB = 3 : 13$, $SK : KC = 3 : 13$. Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки M , N , K , и плоскостью основания пирамиды.

2 вариант

1. Найдите целое число, которое задается выражением:

$$(\sqrt{11} + \sqrt{6})^2 \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{6})^2.$$

2. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а из B в A в тот же момент по той же дороге выехал автобус. Они ехали без остановок с постоянными скоростями. На весь путь велосипедист затратил 4 часа, а автобус 1 час. Через сколько минут после выезда они встретились?

3. Решите уравнение:

$$(x^2 + 7x + 4)^2 = (x + 5)(x + 2).$$

4. Решите уравнение:

$$\sin\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + 11 \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 8 - 4 \sin x.$$

5. Трапеция площади 216 см^2 , в которой есть углы 90° и 30° , описана около окружности. Найдите радиус окружности.

6. Решите неравенство:

$$1 + \sqrt{17 - \log_x 2} \cdot \log_2(x^7) \geq \log_2(x^{27}).$$

7. Решите уравнение:

$$3^{\frac{5x+2}{x+2}} - 3^{\frac{4-2x}{x+2}} = 6.$$

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота в 2 раза больше, чем сторона основания. На боковых ребрах SA , SB , SC выбраны точки M , N , K соответственно так, что $SM : MA = 3 : 1$, $SN : NB = 3 : 7$, $SK : KC = 3 : 7$. Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки M , N , K , и плоскостью основания пирамиды.

2020 год

1 вариант

1. Удовлетворяет ли число $\frac{3}{5}$ неравенству: $\sqrt{\frac{1}{3} - x^2} \geq 0$?
2. Найдите наименьшее общее кратное чисел 45, 312 и 325.
3. Решите уравнение:

$$(2x^2 - x + 5) \cdot |\sin x| = (x^2 + 5x - 3) \cdot \sin x.$$

4. Решите неравенство:

$$2 \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) + \frac{\log_3(x^2 - x + 2)}{\log_9 4} \geq 1.$$

5. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$, $BC = 6$ и $AC = 7$ проведены биссектрисы AK , BL и CM . Найдите отношение площади треугольника BKM к площади треугольника CKL .
6. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$|2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x + a| \leq 5$$

выполняется для любых значений x .

2 вариант

1. Вычислите: $\left(\frac{17}{6} + 2^{200}\right) - \left(\frac{27}{10} + 4^{100}\right)$.

2. Найдите все целые числа, удовлетворяющие неравенству:

$$\sqrt[6]{z+1} < \sqrt[8]{8-z}.$$

3. Решите уравнение:

$$\sin 2x - 5 \sin x = 3 \operatorname{tg} x.$$

4. Решите неравенство:

$$\log_3(x^2) - 2 \cdot \log_{3x} 9 \leq 5.$$

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AM и BN , пересекающиеся в точке O . Известно, что отрезок MN имеет длину 2 см, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки M , N и O . Найдите углы и стороны треугольника MNO .

6. Найдите все пары значений параметров (a, b) , для каждой из которых система уравнений:

$$\begin{cases} x^3 - 7x + a = 0, \\ x^2 - 3x + b = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы 2 различных решения (относительно x).

2021 год

1 вариант

1. Пусть $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$. Вычислите $f\left(\frac{7}{2}\right)$.
2. Через первую трубу бассейн наполняется (от пустого до полного) за 10 часов, через вторую – за 15 часов. За сколько часов наполнится этот бассейн, если открыть одновременно обе трубы? (Скорости поступления воды через каждую трубу считать постоянными.)
3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4 \cos x + \cos 2y = -2 + 4 \sin^2 x \\ 2 \sin y - 2 \cos x = 1 \end{cases}.$$

4. Решите неравенство:

$$3 + \frac{1}{\log_{64}\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \log_{\frac{x}{2}}\left(34x - \frac{8}{x}\right).$$

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD . Известно, что $AB = 6$, $AC = \sqrt{34}$, $AD = 4$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.
6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$a^2x^2 + \sqrt{x^2 - 5x + 4} = a(2\sqrt{7} - 4)x + 4\sqrt{7} - 11$$

имеет хотя бы одно решение.

2 вариант

1. Какое целое число задается выражением:

$$\frac{21^4 \cdot 22^3}{36 \cdot 77^2}?$$

2. В геометрической прогрессии пятый член равен 48, а восьмой член равен 384. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

3. Решите уравнение:

$$4 \cos 11x \cdot \cos 13x + 7 = 4 \cos 5x \cdot \cos 7x + 19 \cos 12x.$$

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5^y = 25x, \\ 2 \log_5 x - 3 \log_x 5 = y. \end{cases}$$

5. Дана окружность с диаметром AB . Хорды AM и BN этой окружности пересекаются в точке K . Известно, что $AB = 2\sqrt{19}$, $KM = 3$, $KN = 2$. Найдите расстояние между точками M и N .

6. Известно, что $6x^2 + 8xy + 3y^2 \leq 4$. Какое максимальное значение может при этом иметь выражение $2x + y$?

3 вариант

1. Пусть $f(x) = x^3 + \cos \frac{\pi}{10}$. Вычислите: $f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)$.
2. Из пункта B в пункт A выехал пассажирский поезд со скоростью 60 километров в час. Через 2 часа из пункта A в пункт B по той же железной дороге выехал скорый поезд со скоростью 90 километров в час. Расстояние между пунктами A и B по этой железной дороге равно 420 км. На каком расстоянии от B встретятся эти поезда? (Поезда едут без остановок.)

3. Решите уравнение:

$$2 \cdot (11 - \cos^2 x) = (22 \sin 2x - \operatorname{tg} x) \cdot \sin 2x.$$

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot 5^x + 2^y = 20, \\ x \cdot \log_7 5 + y \cdot \log_{49} 4 = \log_7 18. \end{cases}$$

5. Четырехугольник вписан в окружность. Его стороны последовательно имеют длины 9 см, 2 см, 8 см, 3 см. Найдите площадь этого четырехугольника.
6. Решите неравенство:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 - x - 2} \leq \sqrt{3x^2 - 3x + 6} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

2022 год

1 вариант

1. Какое из чисел больше:

$$3,8 \cdot 3,7 + 29 \quad \text{или} \quad \frac{238}{17} + \sqrt{841}?$$

2. Решите уравнение:

$$5x(x - 8) = 3(|x - 4| - 4).$$

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5^{\frac{x-y}{2}} + 5^x \cdot 5^{-y} = 30, \\ 5^{x+y} + 5 = 30 \cdot 5^y. \end{cases}$$

4. Решите уравнение:

$$\sin^2 7x \cdot \left(\sin 7x \cdot \cos x - \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} \right) = \frac{\sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin x \cdot \cos 7x}{1 + \operatorname{ctg}^2 7x}.$$

5. Длины оснований трапеции относятся как 1 : 3, а длины боковых сторон как 3 : 4. В эту трапецию вписана окружность. Найдите отношение площади круга, ограниченного данной окружностью, к площади трапеции.

6. Решите неравенство:

$$2 \log_{x-3}(x^2 - 16x + 64) + 2 \log_{8-x}(-x^2 + 11x - 24) + \log_{8-x}(x^2 - 6x + 9) > 10.$$

7. Все вершины треугольной пирамиды $ABCD$ лежат на одной сфере. Известно, что $AB = AC = 8$, $BC = 8\sqrt{3}$ и $AD = BD = CD = 17$. Найдите радиус сферы.

8. Найдите все значения a , при каждом из которых у неравенств

$$x^2 - 4 \leq 4a(x - 2) \quad \text{и} \quad x^2 + a^2 < a(2x + 1)$$

нет ни одного общего решения.

2 вариант

1. Какое из чисел больше:

$$2,9 \cdot 4,5 + 27 \quad \text{или} \quad \frac{247}{19} + \sqrt{729}?$$

2. Решите уравнение:

$$7x(x - 6) = 3(|x - 3| - 3).$$

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} + 3^x \cdot 3^{-y} = 12, \\ 3^{x+y} + 1 = 10 \cdot 3^y. \end{cases}$$

4. Решите уравнение:

$$\sin^2 2x \cdot \left(\sin 3x \cdot \cos 4x - \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{9x}{2} \right) = \frac{\sin \frac{9x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin 4x \cdot \cos 3x}{1 + \operatorname{ctg}^2 2x}.$$

5. Длины оснований трапеции относятся как 1 : 4, а длины боковых сторон как 4 : 5. В эту трапецию вписана окружность. Найдите отношение площади круга, ограниченного данной окружностью, к площади трапеции.

6. Решите неравенство:

$$2 \log_{x-2}(x^2 - 14x + 49) + 2 \log_{7-x}(-x^2 + 9x - 14) + \log_{7-x}(x^2 - 4x + 4) > 10.$$

7. Все вершины треугольной пирамиды $ABCD$ лежат на одной сфере. Известно, что $AB = AC = 5$, $BC = 5\sqrt{3}$ и $AD = BD = CD = 13$. Найдите радиус сферы.

8. Найдите все значения a , при каждом из которых у неравенств

$$x^2 - 4 \leq 4a(x + 2) \quad \text{и} \quad x^2 + a^2 < a(2x - 1)$$

нет ни одного общего решения.

2023 год

1 вариант

1. Вычислите:

$$\frac{12,5^3 + 1,2^3}{13,7} - (12,5^2 + 1,2^2).$$

2. Докажите, что число

$$K = \frac{3}{\sqrt{10} + 1} + \frac{1}{\sqrt{10} - 2} - \frac{\sqrt{10}}{2}$$

целое, и найдите его.

3. Найдите числовое значение выражение $S = a^3b^2 + a^2b^3$, где a и b – корни квадратного уравнения

$$4x^2 - 19x + 16 = 0.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg} \pi x^2 \cdot \operatorname{tg} \left(2\pi x + \frac{\pi}{3} \right) = 1,$$

удовлетворяющие условию $|x| \leq 1$.

5. Решите неравенство

$$(4 - 2^{4x-x^2-2}) \cdot \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \geq 0.$$

6. Произведение первых четырех членов убывающей неотрицательной геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равно 1. Сумма квадратов этих членов равна $85/8$. Найдите: $b_1 \cdot b_2 + b_3 \cdot b_4$.7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) основание $AC = 10\sqrt{6}$. На стороне BC выбрана точка Q так, что $BQ : QC = 3 : 7$ и $S_{AQC} = 140$. На стороне AB выбрана точка P так, что $S_{PBQ} = 30$. Найдите длину отрезка PQ .8. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6\sqrt{2}$. Высота призмы $BB_1 = 6\sqrt{2}$. В каком отношении общий перпендикуляр двух скрещивающихся диагоналей BA_1 и CB_1 делит диагональ BA_1 ?

2 вариант

1. Вычислите:

$$\frac{12,5^3 - 1,2^3}{11,3} - (12,5^2 + 1,2^2).$$

2. Докажите, что число

$$K = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} + \frac{1}{4\sqrt{5} - 8} - \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

целое, и найдите его.

3. Найдите числовое значение выражение $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$, где a и b – корни квадратного уравнения

$$5x^2 - 19x + 4 = 0.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg} \pi x^2 \cdot \operatorname{ctg} \left(2\pi x + \frac{\pi}{3} \right) = 1,$$

удовлетворяющие условию $|x| \leq 1$.

5. Решите неравенство

$$(27 - 3^{4x-x^2-1}) \cdot \log_{x^2}(4 - \sqrt{6+x^2}) \geq 0.$$

6. Произведение первых четырех членов возрастающей неотрицательной геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равно 1. Сумма квадратов этих членов равна $85/8$. Найдите: $b_1 \cdot b_2 - b_3 \cdot b_4$.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) основание $AC = 6\sqrt{5}$. На стороне AB выбрана точка P так, что $AP : PB = 1 : 1$. На стороне BC выбрана точка Q так, что $S_{PBQ} = 6$ и $S_{AQC} = 48$. Найдите длину отрезка PQ .

8. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $BC = 12\sqrt{2}$. Высота призмы $BB_1 = 12\sqrt{2}$. В каком отношении общий перпендикуляр двух скрещивающихся диагоналей BA_1 и CB_1 делит диагональ BA_1 ?

2024 год

1 вариант

1. Какое из чисел больше: $A = 12 \cdot (7 + 1) \cdot (7^2 + 1) \cdot (7^4 + 1)$ или $B = 2 \cdot 7^8 - 1$?

2. Собственная скорость теплохода в 4 раза больше скорости течения реки, причем на путь длиной 10 километров по течению он тратит на 20 минут больше, чем на путь длиной 3 километра против течения реки. Найдите собственную скорость теплохода. Ответ дайте в километрах в час.

3. Для числа $\sqrt{3} + \sqrt{23}$ найдите ближайшее к нему натуральное число. Ответ обоснуйте.

4. Решите неравенство

$$9^{x^2+1} - 30 \cdot 15^{x^2} + 225 \cdot 25^{x^2-1} > 0.$$

5. В треугольнике ABC проведены высоты AH_1 и BH_2 . Известно, что $H_1H_2 = \sqrt{3}$, $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

6. Решите уравнение

$$\sqrt{4 \cos \left(\frac{2025\pi}{2} + x \right) - 4 \cos^2 x + 5} = \frac{3}{2} - \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

7. Найдите все положительные решения уравнения

$$3^{x^4-6} \cdot 9^{\frac{9\sqrt{3}}{x}-6} \cdot 27^{\frac{9}{x^2}-6} = 2\sqrt{3}x - x^2 - 2.$$

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC ребро AS длиннее ребра BC в два раза. На ребре SC выбрана точка D так, что плоскость ABD делит объем пирамиды в отношении 3 к 1. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и плоскостью ABD .

2 вариант

1. Какое из чисел больше: $C = 15 \cdot (6 + 1) \cdot (6^2 + 1) \cdot (6^4 + 1)$ или $D = 3 \cdot 6^8 - 4$?
2. Скорость течения реки в 5 раз меньше собственной скорости катера, причем на путь длиной 4 километра против течения он тратит на 30 минут меньше, чем на путь длиной 18 километров по течению реки. Найдите собственную скорость катера. Ответ дайте в километрах в час.
3. Для числа $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ найдите ближайшее к нему натуральное число. Ответ обоснуйте.
4. Решите неравенство

$$4^{x^2+1} - 10 \cdot 6^{x^2} + 324 \cdot 9^{x^2-2} > 0.$$

5. В треугольнике ABC проведены высоты AD и BE . Известно, что $\angle ACB = \frac{5\pi}{6}$, и радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 6. Найдите расстояние между точками D и E .
6. Решите уравнение

$$\sqrt{6 \sin \left(x - \frac{2025\pi}{2} \right) + 10 - 9 \sin^2 x} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

7. Найдите все положительные решения уравнения

$$2^{x^4-2} \cdot 4^{\frac{4\sqrt{2}}{x}-2} \cdot 16^{\frac{2}{x^2}-2} = 2\sqrt{2} \cdot x - x^2 + 2.$$

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC ребро AS длиннее ребра BC в два раза. На ребре SC выбрана точка D так, что плоскость ABD делит объем пирамиды в отношении 2 к 1. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и плоскостью ABD .

3 вариант

1. График функции $f(x) = 4x^2 - 7x + 33$ пересекается с графиком функции $g(x) = 180x + h$ в точке с абсциссой $x = -4,25$. Найдите абсциссу второй точки пересечения этих графиков.

2. Дана возрастающая геометрическая прогрессия. Известно, что сумма первого и четвертого членов прогрессии равна 344, а второго и третьего – равна 56. Найдите пятый член этой прогрессии.

3. Найдите ближайшее целое число к числу

$$\log_2 \left(-\sqrt[3]{\frac{47^2 + 16^2 - 53^2 - 22^2}{65^2 - 2 \cdot 65 \cdot 59 + 59^2}} \right).$$

Ответ обоснуйте.

4. Решите неравенство: $\log_{1-x}(1-x)^2 + \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt[3]{(2x^2+5)^3}$.

5. Найдите сумму всех значений переменной x , удовлетворяющих системе условий

$$\begin{cases} \frac{x-\pi}{2\pi-x} \geq \frac{x-\pi}{2\pi+x} \\ \operatorname{ctg} x(2 \sin x + \sqrt{1,5}) = (\operatorname{ctg} x + 1) \cos x. \end{cases}$$

6. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Биссектрисы внутренних односторонних углов BAD и ABC пересекаются в точке F , а биссектрисы углов BCD и ADC – в точке G . Найдите длину отрезка FG , если $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $AD = 7$.

7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (в основании – квадрат $ABCD$) через точки $K \in SC$ и $L \in SB$ проведена плоскость α параллельная BD – диагонали основания. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α , если $AB = 6$, $SB = 9$, $SK : KC = 1 : 2$, $SL : LB = 2 : 1$.

8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(4x^2 + x + 1)^2 - 2x(4x^2 + x + 1) + ax^2 = 0$$

имеет ровно два решения на промежутке $x \in [\frac{1}{4}; 1]$.

РЕШЕНИЯ

2011 год

1 вариант

1. Какие из чисел $2, \frac{3}{4}, \sqrt{7}+2, \sqrt{7}-2$ являются корнями уравнения

$$4x^3 + 9 = 19x^2?$$

Решение:

Проверим соответствующие соотношения:

а) $4 \cdot 2^3 + 9 = 19 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 41 = 76$ — неверно;

б) $4 \cdot \frac{3^3}{4^3} + 9 = 19 \cdot \frac{3^2}{4^2} \Leftrightarrow \frac{27}{16} + 9 = \frac{171}{16}$ — верно;

в) $4(\sqrt{7}+2)^3 + 9 = 19(\sqrt{7}+2)^2 \Leftrightarrow$
 $4(7\sqrt{7}+42+12\sqrt{7}+8)+9 = 19(7+4\sqrt{7}+4) \Leftrightarrow$
 $76\sqrt{7}+209 = 209+76\sqrt{7}$ — верно;

г) $4(\sqrt{7}-2)^3 + 9 = 19(\sqrt{7}-2)^2 \Leftrightarrow$
 $4(7\sqrt{7}-42+12\sqrt{7}-8)+9 = 19(7-4\sqrt{7}+4) \Leftrightarrow$
 $76\sqrt{7}-191 = 209-76\sqrt{7}$ — неверно.

Ответ: $\frac{3}{4}; \sqrt{7}+2$.

2. Представьте число $\sqrt{33}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,1.

Решение:

Из неравенства $5^2 < 33 < 6^2$, понятно, что $5 < \sqrt{33} < 6$. Значит, целая часть равна 5. Обозначим первую цифру после запятой через x (x — целое число от 0 до 9). Тогда верно неравенство:

$$5 + 0,1x < \sqrt{33} < 5 + 0,1(x+1) \Rightarrow$$

$$25 + x + 0,01x^2 < 33 < 25 + (x+1) + 0,01(x+1)^2 \Rightarrow$$

$$2500 + 100x + x^2 < 3300 < 2500 + 100(x+1) + (x+1)^2.$$

Получим 2 квадратных неравенства:

$$\begin{cases} x^2 + 100x - 800 < 0, \\ x^2 + 102x - 699 > 0. \end{cases}$$

Несложно проверить, что первому неравенству удовлетворяют все цифры x от 0 до 7, а второму — от 7 до 9. Значит, первая цифра после запятой — 7.

Ответ: 5,7.

3. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) - \sin(\pi + 4x) = \sin 4x + \sin x.$$

Решение:

Применим формулы приведения:

$$\sin 2x + \sin 4x = \sin 4x + \sin x \Leftrightarrow \sin 2x - \sin x = 0.$$

Далее используем формулу синуса двойного угла:

$$\sin x(2 \cos x - 1) = 0.$$

Если обращается в ноль первый множитель, то $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Если второй — то $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: πn , $n \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^x \cdot 32^y = 256, \\ \sqrt{2x - 2} = y. \end{cases}$$

Решение:

Приведем в первом уравнении все множители к степени двойки:

$$2^{2x} \cdot 2^{5y} = 2^8.$$

Данное уравнение сводится к линейному $2x + 5y = 8$. А второе уравнение возведем в квадрат (с условием, что $y \geq 0$). Получим систему:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8, \\ 2x - 2 = y^2, \\ y \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 5y - 6 = 0, \\ 2x = 2 + y^2, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет решения $y = 1$ и $y = -6$. С учетом условия $y \geq 0$, оставим только $y = 1$ и соответствующий ему $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $(\frac{3}{2}; 1)$.

5. В арифметической прогрессии 34 члена, и разность этой прогрессии равна 12. Сумма всех членов прогрессии в 4 раза больше, чем сумма членов, стоящих на нечетных местах. Найдите первый член этой прогрессии.

Решение:

Сумма всех членов равна $S = \frac{a_1 + a_{34}}{2} \cdot 34$. Выражая a_{34} через первый член и разность прогрессии $a_{34} = a_1 + 33d = a_1 + 33 \cdot 12$, получим:

$$S = 34(a_1 + 33 \cdot 6).$$

Заметим, что члены, стоящие на нечетных местах, тоже образуют арифметическую прогрессию. Причем количество таких членов равно 17 (первый член a_1 , последний — a_{33}), а разность $f = 24$. Соответственно, сумму членов, стоящих на нечетных местах, тоже можно посчитать как сумму арифметической прогрессии: $T = \frac{a_1 + a_{33}}{2} \cdot 17$. Выражая a_{33} через первый член и разность прогрессии $a_{33} = a_1 + 32d = a_1 + 32 \cdot 12$, получим:

$$T = 17(a_1 + 32 \cdot 6).$$

Из условия известно, что S в 4 раза больше, чем T , легко найти a_1 :

$$34(a_1 + 33 \cdot 6) = 4 \cdot 17(a_1 + 32 \cdot 6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 33 \cdot 6 = 2a_1 + 64 \cdot 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 6(33 - 64) = -186$$

Ответ: -186 .

6. В трапеции, описанной около окружности радиуса 4, разность длин боковых сторон равна 4, а длина средней линии равна 12. Найдите длины сторон трапеции.

Решение:

Обозначим: A, B, C, D — вершины трапеции; $BC = a$, $AD = b$ — длины оснований трапеции; $CD = f$, $AB = e$ — боковые стороны трапеции ($e > f$). Так как около трапеции можно описать окружность, то $a + b = e + f$. Получаем систему:

$$\begin{cases} a + b = e + f, \\ f - e = 4, \\ \frac{a+b}{2} = 12. \end{cases}$$

Из первого и последнего уравнения легко получить, что $e + f = 24$. А с учетом второго соотношения $f - e = 4$, находим ответ $f = 14$, $e = 10$.

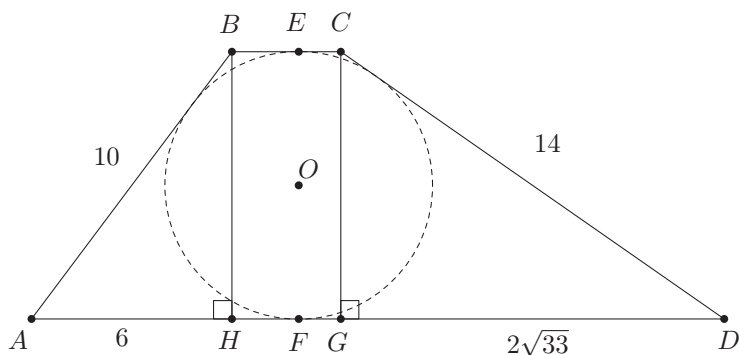


Рис. 1: к задаче №6 (1 случай)

Чтобы найти боковые стороны, сделаем стандартное дополнительное построение: опустим высоты BH и CG . Так как диаметр вписанной окружности EF равен высоте трапеции, то известно, что $BH = CG = EF = 8$. По теореме Пифагора найдем AH и DG :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Leftrightarrow AH = 6,$$

$$GD^2 = CD^2 - CG^2 = 14^2 - 8^2 = 132 \Leftrightarrow GD = 2\sqrt{33}.$$

Так как $BCGH$ — прямоугольник, то $GH = BC = a$. Обратим внимание на два принципиальных случая расположения точек A , H , G и D на прямой: $A-H-G-D$ и $H-A-G-D$ (стоит отметить, что остальные варианты соответствуют одному из данных двух).

В первом случае $AH + a + GD = b$. Получаем систему:

$$\begin{cases} a + b = 24, \\ b - a = 2\sqrt{33} + 6. \end{cases}$$

Откуда легко найти $a = 9 - \sqrt{33}$ и $b = 15 + \sqrt{33}$.

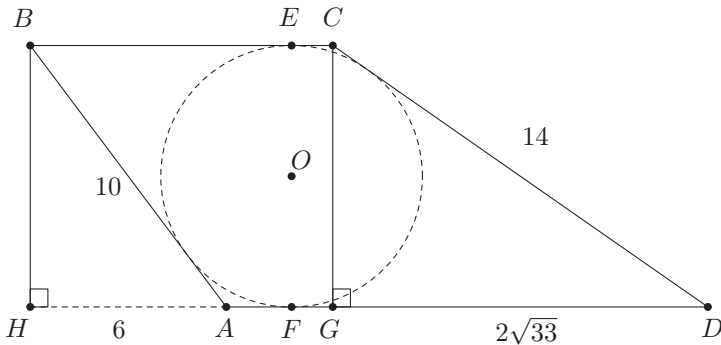


Рис. 2: к задаче №6 (2 случай)

Во втором случае $HA + b = a + GD$. Получаем систему:

$$\begin{cases} a + b = 24, \\ b - a = 2\sqrt{33} - 6. \end{cases}$$

Откуда легко найти $a = 15 - \sqrt{33}$ и $b = 9 + \sqrt{33}$.

Ответ: 10; $9 - \sqrt{33}$; 14; $15 + \sqrt{33}$ или 10; $15 - \sqrt{33}$; 14; $9 + \sqrt{33}$.

7. Решите неравенство

$$\frac{\log_2(x+6) \cdot \log_5(x+5)}{x+4} \leq \frac{\log_5(x+6) \cdot \log_2(x+5)}{x+3}.$$

Решение:

Предварительно отметим несложное свойство логарифмов при допустимых значениях a , b , c и d :

$$\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b.$$

Для доказательства этого свойства достаточно переписать каждый логарифм как отношение двух логарифмов по одному и тому же основанию (например, по основанию e):

$$\frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln d}{\ln c} = \frac{\ln d}{\ln a} \cdot \frac{\ln b}{\ln c}.$$

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{\log_5(x+6) \cdot \log_2(x+5)}{x+4} &\leq \frac{\log_5(x+6) \cdot \log_2(x+5)}{x+3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_5(x+6) \cdot \log_2(x+5) \cdot \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+3} \right) &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\log_5(x+6) \cdot \log_2(x+5)}{(x+4)(x+3)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Неравенство решим методом интервалов, предварительно для каждого из трех сомножителей (знаменатель — один сомножитель) обозначив области, в которых они неотрицательны.

$$\log_5(x+6) \geq 0 \Leftrightarrow x+6 \geq 1 \Leftrightarrow x \in [-5, +\infty),$$

$$\log_2(x+5) \geq 0 \Leftrightarrow x+5 \geq 1 \Leftrightarrow x \in [-4, +\infty),$$

$$(x+4)(x+3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (-3, +\infty).$$

	$(-5, -4)$	$(-4, -3)$	$(-3, +\infty)$
$\log_5(x+6)$	+	+	+
$\log_2(x+5)$	—	+	+
$(x+4)(x+3)$	+	—	+
L	—	—	+

С учетом области определения $x \in (-5, -4) \cup (-4, -3) \cup (-3, +\infty)$ можно выделить интервалы знакопостоянства выражения

$$L = \frac{\log_5(x+6) \cdot \log_2(x+5)}{(x+4)(x+3)}.$$

Отметим, что точки, в которых числитель обнуляется, не принадлежат области допустимых значений.

Ответ: $(-3; +\infty)$.

8. В пирамиде $ABCD$: $AB = 1$, $AC = 2$, $AD = 3$, $BC = \sqrt{5}$, $BD = \sqrt{10}$, $CD = \sqrt{13}$. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $ABCD$.

Решение:

Радиус вписанного шара найдем с помощью формулы объема пирамиды:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} R \cdot S,$$

где S — площадь полной поверхности. Вычислим объем и площадь пирамиды.

Найдем объем V_{ABCD} . Заметим, что все плоские углы BAC , CAD , DAB с вершиной в точке A — прямые. Для этого достаточно проверить выполнение теоремы Пифагора для треугольников CAB ($\sqrt{5}^2 = 1^2 + 2^2$), BAD ($\sqrt{10}^2 = 1^2 + 3^2$) и DAC ($\sqrt{13}^2 = 2^2 + 3^2$). Так как все углы при вершине A — прямые, то DA является высотой, опущенной из вершины D на плоскость ABC , которая является прямоугольным треугольником. Значит,

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}AD \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6}AD \cdot AB \cdot AC = 1.$$

Найдем площадь полной поверхности $S = S_{ABC} + S_{ADC} + S_{ABD} + S_{BCD}$. Первые три треугольника прямоугольные и их площади, соответственно, равны:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot AC = 1,$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2}DA \cdot AC = 3,$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}BA \cdot AD = \frac{3}{2}.$$

Последний треугольник имеет стороны $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$. Найти площадь треугольника со сторонами в виде радикалов можно двумя способами: либо с использованием теоремы Пифагора для двух треугольников, образованных одной из высот, либо с помощью развернутой формулы Герона, которая зависит только от квадратов сторон:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4}.$$

Подставим квадраты сторон:

$$S_{BCD} = \frac{1}{4}\sqrt{2(5 \cdot 10 + 10 \cdot 13 + 13 \cdot 5) - 5^2 - 10^2 - 13^2} = \frac{1}{4}\sqrt{196} = \frac{7}{2}.$$

Площадь полной поверхности: $S = 1 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 9$. Радиус вписанной сферы: $R = \frac{3V_{ABCD}}{S} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

2012 год

1 вариант

1. Определите, какие из чисел являются целыми, и вычислите эти целые числа:

а) $\frac{19}{7} + \frac{7}{5} - \frac{4}{35};$

б) $\sqrt{22} \cdot \sqrt{33} \cdot \sqrt{6};$

в) $\frac{2,9 \cdot 3,4}{4,93}.$

Решение:

Вычислим значения данных выражений:

а) $\frac{19}{7} + \frac{7}{5} - \frac{4}{35} = \frac{95 + 49 - 4}{35} = \frac{140}{35} = 4 - \text{целое};$

б) $\sqrt{22} \cdot \sqrt{33} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66 - \text{целое};$

в) $\frac{2,9 \cdot 3,4}{4,93} = \frac{29 \cdot 34}{493} = 2 - \text{целое}.$

Ответ: все три числа являются целыми: 4, 66, 2.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + 24} = 6 - x^2.$$

Решение:

Возведем обе части уравнения в квадрат (с условием неотрицательности правой части):

$$\sqrt{x^2 + 24} = 6 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 24} = (6 - x^2)^2, \\ 6 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 13x^2 + 12 = 0, \\ x^2 \leq 6. \end{cases}$$

Сделаем стандартную для биквадратного уравнения замену $t = x^2$:

$$\begin{cases} t^2 - 13t + 12 = 0, \\ t \leq 6. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет корни 1 и 12. Учитывая второе неравенство, получаем $t = 1$. Вернемся к исходной переменной: $x^2 = 1$ и получим ответ $x = \pm 1$.

Ответ: $-1; 1$.

3. Решите уравнение

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 |\cos x + \sin x| = \frac{\pi^2}{4} (\cos x + \sin x).$$

Решение:

Раскроем модуль $|\cos x + \sin x|$.

а) $\cos x + \sin x = 0$. В этом случае уравнение эквивалентно верному тождеству $0 = 0$. Найдем все x , которые удовлетворяют условию а):

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) $\cos x + \sin x > 0$. Сократим на $\cos x + \sin x > 0$:

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

Находим корни данного квадратного уравнения: 0 и π . Условию б) удовлетворяет только первый корень. Значит, $x = 0$.

в) $\cos x + \sin x < 0$. Сократим на $\cos x + \sin x < 0$:

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{4}.$$

Полученное уравнения не имеет корней.

Ответ: $0; \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4. В арифметической прогрессии десятый член больше пятого члена на 15 и больше второго члена в 13 раз. Найдите сумму всех членов этой прогрессии, начиная с сотого члена и заканчивая двухсотым.

Решение:

Используем стандартные обозначения для членов арифметической прогрессии: a_n — n -й член прогрессии, d — разность прогрессии:

$$\begin{cases} a_{10} = a_5 + 15, \\ a_{10} = 13a_2 \end{cases}$$

С учетом формулы $a_n = a_1 + (n - 1)d$ найдем первый член и разность прогрессии:

$$\begin{cases} a_1 + 9d = a_1 + 4d + 15, \\ a_1 + 9d = 13a_1 + 13d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3, \\ a_1 = -1. \end{cases}$$

Чтобы найти сумму членов прогрессии с сотого до двухсотого, просуммируем 101 подряд идущий член арифметической прогрессии:

$$S = a_{100} + a_{101} + \dots + a_{200} = \frac{a_{100} + a_{200}}{2} \cdot 101.$$

Найдем необходимые члены прогрессии:

$$a_{100} = a_1 + 99d = -1 + 99 \cdot 3 = 296,$$

$$a_{200} = a_1 + 199d = -1 + 199 \cdot 3 = 596.$$

Получим ответ: $S = \frac{296+596}{2} \cdot 101 = 45046$.

Ответ: 45046.

5. Решите неравенство

$$\log_7 x \leq 5 + 2 \log_{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{7} \right).$$

Решение:

Приведем логарифм справа к основанию 7:

$$\log_{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{7} \right) = \log_{x^{1/2}} 7^{-1} = -2 \log_x 7 = -\frac{2}{\log_7 x}.$$

Сделаем замену переменной $t = \log_7 x$:

$$t \leq 5 - \frac{4}{t} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t + 4}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t-4)}{t} \leq 0.$$

Решим методом интервалов: $t \in (-\infty, 0) \cup [1, 4]$. Для возврата к искомой переменной x , перепишем в виде неравенств:

$$\begin{cases} t < 0, \\ \begin{cases} t \geq 1, \\ t \leq 4 \end{cases} \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\begin{cases} \log_7 x < 0, \\ \begin{cases} \log_7 x \geq 1, \\ \log_7 x \leq 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < 1, \\ \begin{cases} x \geq 7, \\ x \leq 7^4. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1) \cup [7; 2401]$.

6. В выпуклом шестиугольнике все углы равны 120° и четыре последовательные стороны имеют длины 2, 3, 3, 4. Найдите площадь шестиугольника.

Решение:

Обозначим вершины 6-угольника через A, B, C, D, E и F . Причем $AB = 2, BC = CD = 3, DE = 4$. Продолжим прямые AB и

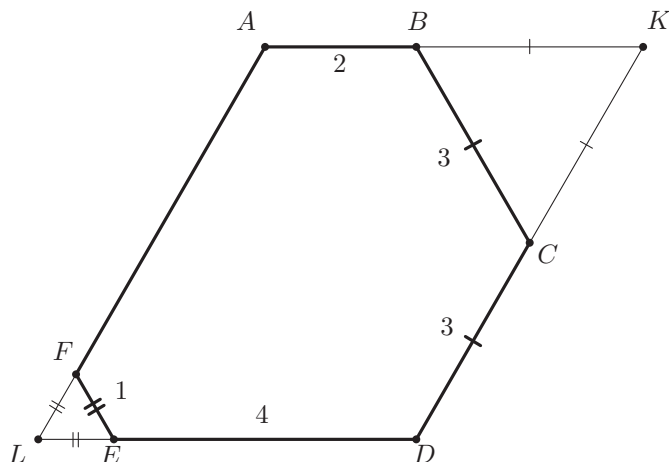


Рис. 3: к задаче №6

CD по пересечения в точке K и прямые AF и DE до пересечения в точке L .

Треугольник BCK — равносторонний, так как $\angle CBK = \angle BCK = 60^\circ$. Значит, $BK = KC = CB = 3$. Аналогично, треугольник LFE тоже равносторонний, $LF = FE = EL$.

Так как $\angle A = \angle D = 120^\circ$ и $\angle K = \angle L = 60^\circ$, то $AK \parallel DL$ и $AL \parallel KD$, то есть $AKDL$ — параллелограмм. Найдём сторону параллелограмма $LD = AK = AB + BK = 2 + 3 = 5$. Откуда $EF = FL = LE = LD - ED = 5 - 4 = 1$.

Из построения ясно, что площадь шестиугольника $ABCDEF$ равна площади параллелограмма $AKDL$ за вычетом суммы площадей равносторонних треугольников BCK и FEL :

$$S_{ABCDEF} = S_{AKDL} - S_{BCK} - S_{FEL}.$$

Вычислим площадь параллелограмма

$$S_{AKDL} = LD \cdot DK \cdot \sin \angle LDK = 5 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = 15\sqrt{3}$$

и площади треугольников

$$S_{BCK} = BC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4},$$

$$S_{FEL} = FE^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Площадь шестиугольника $S_{ABCDEF} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{25\sqrt{3}}{2}$.

7. Найдите все значения, которые принимает функция

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 1}.$$

Решение:

Найдем все значения параметра a такие, что уравнение

$$\frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 1} = a$$

имеет по крайней мере одно решение.

Заметим, что знаменатель $3x^2 - x + 1$ — это квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом $D = -11 < 0$. Значит, знаменатель никогда не обращается в нуль, и уравнение эквивалентно следующему:

$$(2 - 3a)x^2 + (1 + a)x + (1 - a) = 0.$$

Рассмотрим два случая:

- а) $2 - 3a = 0$. Уравнение будет линейным. Значит, при $a = \frac{2}{3}$, решение существует: $x = -\frac{1}{5}$.
- б) $2 - 3a \neq 0$. Уравнение будет квадратным. Значит, при $a \neq \frac{2}{3}$, решение существует тогда, и только тогда, когда дискриминант неотрицателен:

$$(1 + a)^2 - 4(2 - 3a)(1 - a) \geq 0 \Leftrightarrow 11a^2 - 22a + 7 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\frac{\sqrt{11}}{11} \leq a \leq 1 + 2\frac{\sqrt{11}}{11}.$$

Несложно проверить, что число $\frac{2}{3}$ лежит в указанном множестве на отрезке. Тогда с учетом условия б) во втором случае ответом будет:

$$a \in \left[1 - 2\frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1 + 2\frac{\sqrt{11}}{11}\right].$$

Объединим ответы из двух случаев: $a \in \left[1 - 2\frac{\sqrt{11}}{11}, 1 + 2\frac{\sqrt{11}}{11}\right]$.

Ответ: $\left[1 - 2\frac{\sqrt{11}}{11}; 1 + 2\frac{\sqrt{11}}{11}\right]$.

8. Кусок сыра в форме правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина пирамиды) разрежали одним плоским разрезом, который проходит через ребро AB и делит ребро SC в отношении $1 : 3$, считая от вершины S . Найдите отношение объемов полученных кусков сыра.

Решение:

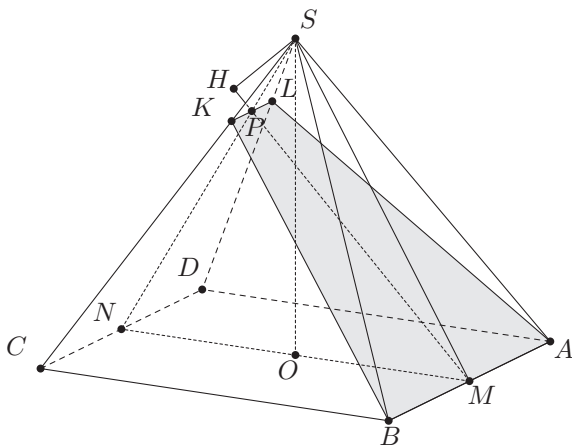


Рис. 4: к задаче №8

Обозначим: K — точка, которая делит SC в отношении $1 : 3$, считая от вершины S ; L — точка пересечения плоскости ABK и ребра SD . Докажем, что сечение, проходящее через точку K и ребро AB — это равнобедренная трапеция $ABKL$.

Четырехугольник $KLDC$ — плоский. Значит, либо прямые KL , CD и AB пересекаются в одной точке, либо — параллельны. Первый вариант невозможен, так как в правильной пирамиде AB параллельно CD . Значит, KL параллельно CD и $ABKL$ — трапеция. Так как треугольники ALD и BKC равны, то сечение $ABKL$ — равнобедренная трапеция.

Введем обозначения: M — середина отрезка AB , N — середина отрезка CD , P — середина отрезка KL , O — центр квадрата $ABCD$. Понятно, что точки P и O будут лежать в плоскости SMN , а плоскости SMN и $ABKL$ будут перпендикулярны (в силу симметрии пирамиды относительно плоскости SMN). Значит, перпендикуляр SH из S на плоскость $ABKL$ тоже будет лежать в плоскости SMN .

Запишем отношение объемов пирамид $SABCD$ и $SABKL$:

$$\frac{V_{SABKL}}{V_{SABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{ABKL} \cdot SH}{\frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO} = \frac{S_{ABKL}}{S_{ABCD}} \cdot \frac{SH}{SO}$$

Отметим, что $ABKL$ — равнобедренная трапеция с высотой MP и площадью $S_{ABKL} = \frac{AB+KL}{2} \cdot MP$, а $ABCD$ — квадрат с площадью $S_{ABCD} = AB \cdot MN$.

Перепишем отношение объемов:

$$\frac{V_{SABKL}}{V_{SABCD}} = \frac{\frac{1}{2}(AB + KL) \cdot MP \cdot SH}{AB \cdot MN \cdot SO} = \frac{AB + KL}{2AB} \cdot \frac{MP \cdot SH}{MN \cdot SO}.$$

С учетом того, что

$$MP \cdot SH = 2S_{SMP} = SP \cdot SM \cdot \sin \angle NSM,$$

$$MN \cdot SO = 2S_{SMN} = SN \cdot SM \cdot \sin \angle NSM,$$

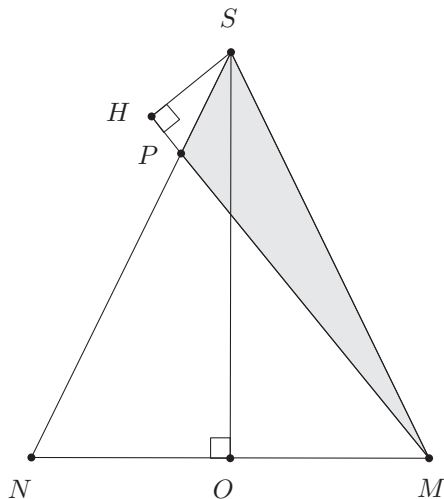


Рис. 5: к задаче №8

получаем соотношение

$$\frac{V_{SABKL}}{V_{SABCD}} = \frac{AB + KL}{2AB} \cdot \frac{SP}{SN}$$

Обозначим длину стороны основания пирамиды через a . Легко заметить, что треугольники SKL и SCD подобны с коэффициентом подобия $1 : 4$. Значит, $KL = \frac{a}{4}$ и $\frac{SP}{SN} = \frac{1}{4}$.

$$\frac{V_{SABKL}}{V_{SABCD}} = \frac{a + \frac{a}{4}}{2a} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{32}$$

Откуда легко найти отношение, в котором делится объем:

$$\frac{V_{ABLKDC}}{V_{SABKL}} = \frac{27}{5}.$$

Ответ: 27 : 5.

2013 год

1 вариант

1. Докажите, что число

$$\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[6]{3}\right)^3 \cdot (9 + 5\sqrt{3})$$

является целым и найдите это целое число.

Решение:

Упростим выражение с помощью формулы куба разности:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[6]{3}\right)^3 \cdot (9 + 5\sqrt{3}) = \\ &= \left(9 - 3\sqrt[3]{9^2}\sqrt[6]{3} + 3\sqrt[3]{9}\sqrt[6]{3^2} - \sqrt{3}\right) (9 + 5\sqrt{3}) = \\ &= \left(9 - 3 \cdot 3^{\frac{3}{2}} + 3 \cdot 3 - \sqrt{3}\right) (9 + 5\sqrt{3}) = 2(9 - 5\sqrt{3})(9 + 5\sqrt{3}) = \\ &= 2 \cdot (81 - 75) = 12. \end{aligned}$$

Ответ: 12.

2. Решите неравенство

$$\frac{13 \cdot |x + 2| - 5}{2 \cdot |x + 2| + 1} < 4.$$

Решение:Замена $t = |x + 2| \geq 0$.

$$\frac{13t - 5}{2t + 1} < 4 \Leftrightarrow \frac{5t - 9}{2t + 1} < 0.$$

Решаем методом интервалов и получаем решение $t \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$. С учетом допустимых значений t получим, что:

$$0 \leq t < \frac{9}{5} \Leftrightarrow |x + 2| < \frac{9}{5} \Leftrightarrow -\frac{9}{5} < x + 2 < \frac{9}{5} \Leftrightarrow -\frac{19}{5} < x < -\frac{1}{5}.$$

Ответ: $\left(-3\frac{4}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

3. Решите уравнение

$$2 + \cos(\pi + 9x) = 5 \sin \frac{\pi - 9x}{2}.$$

Решение:

Используя формулы приведения, приведем уравнение к следующему виду:

$$2 - \cos 9x = 5 \cos \frac{9x}{2}.$$

Применим формулу понижения степени:

$$3 - 2 \cos^2 \frac{9x}{2} = 5 \cos \frac{9x}{2}.$$

После замены $t = \cos \frac{9x}{2} \in [-1; 1]$ получим квадратное уравнение

$$2t^2 + 5t - 3 = 0.$$

Из двух корней $t = -3$ и $t = \frac{1}{2}$ первый является посторонним. Значит:

$$\cos \frac{9x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{9x}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{27} + \frac{4\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm \frac{2\pi}{27} + \frac{4\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}.$

4. В возрастающей арифметической прогрессии произведение седьмого и восьмого членов на 46 больше, чем произведение пятого и девятого членов, и на 108 больше, чем произведение третьего и десятого членов. Чему равна сумма первых 25 членов этой прогрессии?

Решение:

Перепишем условие задачи в стандартных обозначениях арифметической прогрессии:

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_8 = 46 + a_5 \cdot a_9, \\ a_7 \cdot a_8 = 108 + a_3 \cdot a_{10} \end{cases}$$

Выражая все члены прогрессии через разность прогрессии и первый член, получим систему:

$$\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 7d) = 46 + (a_1 + 4d)(a_1 + 8d), \\ (a_1 + 6d)(a_1 + 7d) = 108 + (a_1 + 2d)(a_1 + 9d) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 d + 10d^2 = 46, \\ 2a_1 d + 24d^2 = 108. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения удвоенное первое, получим $d^2 = 4$. С учетом того, что прогрессия возрастающая, получим $d = 2$ и, соответственно, $a_1 = 3$. Найдём $a_{25} = a_1 + 24d = 51$ и сумму первых 25 членов:

$$S_{25} = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 25 = \frac{3 + 51}{2} \cdot 25 = 675.$$

Ответ: 675.

5. Решите неравенство

$$(18 - 3x) \cdot \log_{2^x - 12} \sqrt[3]{2} \leq 1.$$

Решение:

Используя свойства логарифмов, перейдем к эквивалентному неравенству:

$$\log_{2^x - 12} 2^{6-x} \leq 1.$$

а) $2^x - 12 > 1$ — знак неравенства сохраняется при снятии логарифма. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^x - 12 > 1, \\ 2^{6-x} \leq 2^x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 13, \\ \frac{2^{2x} - 12 \cdot 2^x - 64}{2^x} \geq 0. \end{cases}$$

Производя замену $t = 2^x > 0$, получим систему:

$$\begin{cases} t > 13, \\ \frac{(t-16)(t+4)}{t} \geq 0, \end{cases}$$

решение которой находится методом интервалов: $t \geq 16$. Возвращаясь к исходной переменной, получим: $x \geq 4$.

- б) $0 < 2^x - 12 < 1$ — знак неравенства меняется на противоположный при снятии логарифма. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 0 < 2^x - 12 < 1, \\ 2^{6-x} \geq 2^x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 < 2^x < 13, \\ \frac{2^{2x} - 12 \cdot 2^x - 64}{2^x} \leq 0. \end{cases}$$

Снова производя замену $t = 2^x > 0$, получим систему:

$$\begin{cases} 12 < t < 13, \\ \frac{(t-16)(t+4)}{t} \leq 0, \end{cases}$$

решение которой находится методом интервалов: $12 < t < 13$. Возвращаясь к исходной переменной, получим ответ во втором случае: $\log_2 12 < x < \log_2 13$.

Ответ: $(\log_2 12; \log_2 13) \cup [4; +\infty)$.

6. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 20, а длина боковой стороны CD равна $10\sqrt{3}$. Через точки A, B, C проходит окружность, пересекающая основание трапеции AD в точке F . Угол AFB равен 60° . Найдите длину отрезка BF .

Решение:

Трапеция $ABCF$ — вписанная. Следовательно, она равнобедренная: $BF = CA$ и $\angle AFB = \angle CAF = 60^\circ$. По теореме синусов для треугольника ACD :

$$\begin{aligned} \frac{CD}{\sin \angle CAF} &= \frac{AD}{\sin \angle ACD} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \angle ACD &= \frac{AD}{CD} \cdot \sin \angle CAF = \frac{20}{10\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1. \end{aligned}$$

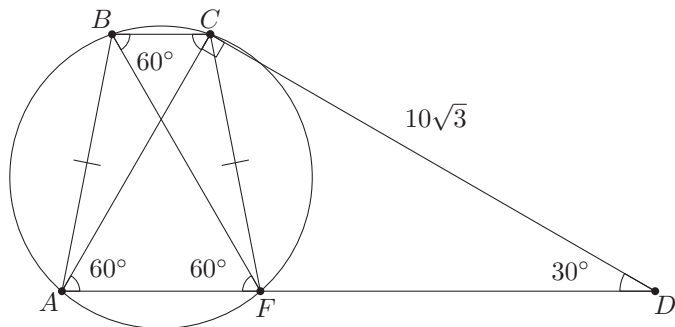


Рис. 6: к задаче №6

Значит, угол ACD — прямой. Найдём AC по теореме Пифагора для треугольника ACD :

$$AC^2 = AD^2 - CD^2 = 20^2 - (10\sqrt{3})^2 = 100.$$

Откуда легко получить $BF = AC = 10$.

Ответ: 10.

7. Произведение двух натуральных чисел уменьшили на 26. Результат разделили на сумму исходных натуральных чисел с остатком. В частном получили 5, а в остатке 60. Найдите исходные натуральные числа.

Решение:

Запишем по определению деление с остатком:

$$a \cdot b - 26 = (a + b) \cdot 5 + 60, \text{ где } 60 < a + b.$$

Разложим полученное уравнение на линейные множители:

$$ab - 5(a + b) = 86 \Leftrightarrow (a - 5)(b - 5) = 111.$$

Справа стоит положительное число, значит слева произведение либо двух отрицательных, либо двух положительных чисел. В

первом случае $a < 5$ и $b < 5$. Тогда их сумма не может быть больше 60. Значит $(a-5)$ и $(b-5)$ — это два натуральных делителя 111, которые в произведении дают 111. Варианты разложения:

$$111 = 1 \cdot 111 = 3 \cdot 37 = 37 \cdot 3 = 111 \cdot 1.$$

Из описанных вариантов условию $a+b > 60$ удовлетворяют только первый и последний, откуда легко найти ответы.

Ответ: (116; 6); (6; 116).

8. Квадрат $ABCD$ со стороной 3 см является основанием двух пирамид $MABCD$ и $NABCD$, причем MA и NC — высоты этих пирамид и точки M, N лежат по одну сторону от плоскости $ABCD$. Сумма длин высот MA и NC равна 9 см, а объем общей части пирамид равен 6 см^3 . Найдите отношение высот MA и NC .

Решение:

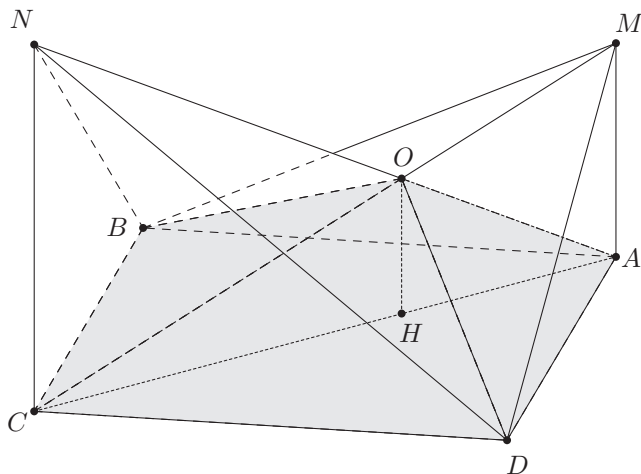


Рис. 7: к задаче №8

Пересечением пирамид $MABCD$ и $NABCD$ является тоже пирамида. Введем обозначения: O — точка пересечения отрезков MC

и AN (вершина полученной пирамиды); H — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость $ABCD$.

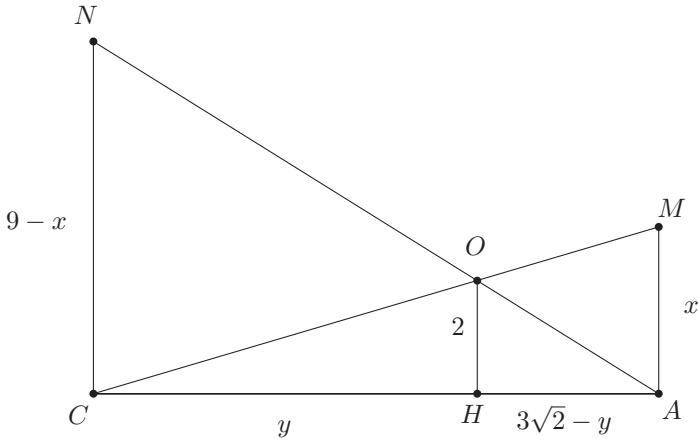


Рис. 8: к задаче №8

Найдем высоту OH :

$$V_{ABCD O} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot OH \Leftrightarrow 6 = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot OH \Leftrightarrow OH = 2.$$

Найдем высоты AM и CN . Обозначим $AM = x$, $HC = y$. Тогда $NC = 9 - x$ и $AH = 3\sqrt{2} - y$. Две пары треугольников MAC , ONC и NCA , ONA подобны:

$$\frac{MA}{OH} = \frac{AC}{NC},$$

$$\frac{NC}{OH} = \frac{CA}{HA}.$$

Из данных соотношений получим систему уравнений с двумя неизвестными x и y :

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{y}, \\ \frac{9-x}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6\sqrt{2}, \\ (9-x)(3\sqrt{2}-y) = 6\sqrt{2}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6\sqrt{2}, \\ 27\sqrt{2} - 3\sqrt{2}x - 9y + xy = 6\sqrt{2} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} xy = 6\sqrt{2}, \\ y = 3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}x \end{cases}$$

Подставим y в первое уравнение и получим квадратное уравнение

$$x^2 - 9x + 18 = 0,$$

которое имеет корни 6 и 3. Соответственно, искомое отношение $\frac{MA}{NC}$ будет равно либо $\frac{1}{2}$, либо 2.

Ответ: $\{\frac{1}{2}; 2\}$.

2014 год

1 вариант

1. К какому целому числу находится ближе всего на числовой оси число

$$\frac{5,1 \cdot 4,2 + 11,76}{2,3 \cdot 2,2 - 2,46}?$$

Решение:

Имеем:

$$5,1 \cdot 4,2 + 11,76 = 21,42 + 11,76 = 33,18,$$

$$2,3 \cdot 2,2 - 2,46 = 5,06 - 2,46 = 2,6.$$

Следовательно,

$$\frac{5,1 \cdot 4,2 + 11,76}{2,3 \cdot 2,2 - 2,46} = 12,7 \dots$$

Ясно, что ближайшим целым числом к полученному числу будет 13.

Ответ: 13.

2. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{41 - 6x - x^2}}{3 - x} = 1.$$

Решение:

Уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \sqrt{41 - 6x - x^2} = 3 - x, \\ 3 - x \neq 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь преобразуется к виду:

$$\begin{cases} 41 - 6x - x^2 = (3 - x)^2, \\ 3 - x > 0. \end{cases}$$

Первое уравнение полученной системы сводится к квадратному уравнению $x^2 - 16 = 0$ с корнями $x = \pm 4$. Неравенству в системе удовлетворяет лишь меньший корень.

Ответ: -4 .

3. Решите уравнение

$$6 \sin^2 3x + 2 \cos^2 6x = 5.$$

Решение:

Применяя к первому слагаемому формулу понижения степени, получим уравнение, равносильное исходному:

$$3 - 3 \cos 6x + 2 \cos^2 6x = 5.$$

Замена $t = \cos 6x \in [-1, 1]$ преобразует уравнение к квадратному

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

с корнями $-\frac{1}{2}$ и 2 . Очевидно, что второй корень не подходит. Получаем:

$$\cos 6x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

4. Даны арифметическая прогрессия, в которой разность отлична от 0, и геометрическая прогрессия. Известно, что 1-й, 2-й и 10-й члены арифметической прогрессии совпадают, соответственно, со 2-м, 5-м и 8-м членами геометрической прогрессии. Найдите отношение суммы 8 первых членов геометрической прогрессии к сумме 8 первых членов арифметической прогрессии.

Решение:

Оставаясь в рамках стандартных обозначений, мы можем переписать условие задачи в виде системы:

$$\begin{cases} a_1 = b_2, \\ a_2 = b_5, \\ a_{10} = b_8, \\ d \neq 0. \end{cases}$$

Используя соотношение $b_5^2 = b_2b_8$, выполняющееся для любой геометрической прогрессии, мы получаем следующее соотношение для данной арифметической прогрессии:

$$a_1(a_1 + 9d) = (a_1 + d)^2.$$

Раскрывая скобки и учитывая неравенство $d \neq 0$, имеем: $d = 7a_1$. Следовательно:

$$q^3 = \frac{b_5}{b_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8a_1}{a_1} = 8,$$

то есть $q = 2$.

Выпишем выражения для суммы первых 8 членов арифметической и геометрической прогрессий, соответственно:

$$S_8^A = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \frac{2a_1 + 7d}{2} \cdot 8 = \frac{51a_1}{2} \cdot 8 = 204a_1,$$

$$S_8^\Gamma = b_1 \frac{q^8 - 1}{q - 1} = \frac{b_2}{q} \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = \frac{255}{2}a_1.$$

Отсюда находим ответ на задачу:

$$\frac{S_8^\Gamma}{S_8^A} = \frac{255a_1}{2} \cdot \frac{1}{204a_1} = \frac{5}{8}.$$

Ответ: $\frac{5}{8}$.

5. Решите неравенство

$$\log_{x^2} \left(5x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{32}{3} \right)^2 \leq 2.$$

Решение:

Область допустимых значений:

$$\begin{cases} 15x^2 - 20x - 32 \neq 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

То есть $x \neq \frac{10 \pm 2\sqrt{145}}{15}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$. Запишем правую часть неравенства в виде логарифма:

$$\log_{x^2} \left(5x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{32}{3} \right)^2 \leq \log_{x^2} x^4.$$

Рассмотрим два случая:

а) $x^2 > 1$. Тогда неравенство преобразуется к виду

$$\left(5x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{32}{3} \right)^2 \leq x^4.$$

Перенесем правую часть влево и распишем разность квадратов:

$$\left(4x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{32}{3} \right) \left(6x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{32}{3} \right) \leq 0.$$

Последнее неравенство после разложения квадратных трехчленов на множители равносильно следующему:

$$24 \left(x - \frac{8}{3} \right) (x + 1)(x - 2) \left(x + \frac{8}{9} \right) \leq 0.$$

Решим методом интервалов:

$$x \in \left[-1; -\frac{8}{9}\right] \cup \left[2; \frac{8}{3}\right].$$

С учетом ограничений $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и области допустимых значений (учтем, что число $\frac{10+2\sqrt{145}}{15}$ лежит в интервале $\left[2, \frac{8}{3}\right)$), получим ответ в случае а):

$$x \in \left[2; \frac{10+2\sqrt{145}}{15}\right) \cup \left(\frac{10+2\sqrt{145}}{15}; \frac{8}{3}\right].$$

б) $0 < x^2 < 1$. Тогда неравенство преобразуется к виду

$$\left(5x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{32}{3}\right)^2 \geq x^4,$$

которое эквивалентно

$$24\left(x - \frac{8}{3}\right)(x+1)(x-2)\left(x + \frac{8}{9}\right) \geq 0.$$

Решим методом интервалов:

$$x \in (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{8}{9}; 2\right] \cup \left[\frac{8}{3}; +\infty\right).$$

С учетом ограничений $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ и области допустимых значений (учтем, что число $\frac{10-2\sqrt{145}}{15}$ не лежит в интервале $\left[-\frac{8}{9}; 0\right)$), получим ответ в случае б):

$$x \in \left[-\frac{8}{9}; 0\right) \cup (0; 1).$$

Ответ: $\left[-\frac{8}{9}; 0\right) \cup (0; 1) \cup \left[2; \frac{10+2\sqrt{145}}{15}\right) \cup \left(\frac{10+2\sqrt{145}}{15}; 2\frac{2}{3}\right].$

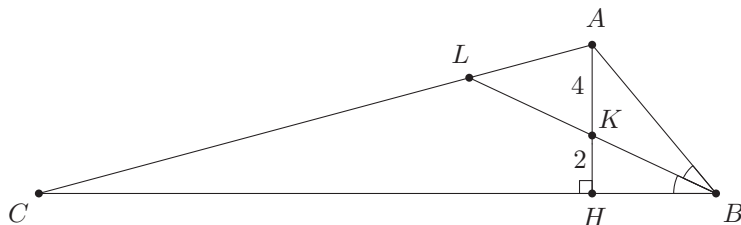


Рис. 9: к задаче №6

6. Высота AH и биссектриса BL в треугольнике ABC пересекаются в точке K . При этом $AK = 4$, $KH = 2$, $BL = 11$. Найдите длину стороны BC .

Решение:

Ясно, что угол $\angle ABC$ и угол $\angle ACB$ — острые, иначе биссектриса не пересекала бы высоту, находящуюся вне треугольника. Согласно свойству биссектрисы внутреннего угла имеем:

$$\cos \angle ABH = \frac{BH}{AB} = \frac{KH}{AK} = \frac{1}{2},$$

откуда $\angle ABH = 60^\circ$. Следовательно, $\angle ABC = 60^\circ$.

Из прямоугольного треугольника ABH , находим $AB = \frac{AH}{\sin 60^\circ} = 4\sqrt{3}$.

Подставим в формулу длины биссектрисы

$$l_b = \frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a + c}$$

все известные параметры

$$11 = \frac{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{3} + BC} = \frac{12 \cdot BC}{4\sqrt{3} + BC}$$

Откуда легко найти $BC = 44\sqrt{3}$.

Ответ: $44\sqrt{3}$.

7. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$a(x^2 + x^{-2}) - (a + 1)(x + x^{-1}) + 5 = 0$$

не имеет решений.

Решение:

Сделаем замену: $t = x + \frac{1}{x}$. Уравнение примет следующий вид:

$$at^2 - (a + 1)t + (5 - 2a) = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $x^2 - tx + 1 = 0$ разрешимо тогда, и только тогда, когда $D = t^2 - 4 \geq 0$, то $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Значит, областью значений функции $t(x) = x + \frac{1}{x}$ является множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Обозначим функцию $f(t) = at^2 - (a + 1)t + (5 - 2a)$. Равносильную задачу можно сформулировать так: найти все значения параметра a , при которых уравнение $at^2 - (a + 1)t + (5 - 2a) = 0$ не имеет решений на множестве $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Рассмотрим три случая:

- а) $a < 0$ — ветви параболы $f(t) = at^2 - (a + 1)t + (5 - 2a)$ направлены вниз.
- б) $a = 0$ — функция $f(t) = -t + 5$ является линейной.
- в) $a > 0$ — ветви параболы $f(t) = at^2 - (a + 1)t + (5 - 2a)$ направлены вверх.

В первом случае на интервале уравнение $f(t) = 0$ обязательно имеет корень $[2; +\infty)$, поскольку $f(2) = 4a - 2(a + 1) + (5 - 2a) = 3 > 0$ и ветви направлены вниз. Во втором случае существует единственный корень $t = 5$. Следовательно, значения $a \leq 0$ тоже не удовлетворяют нашему условию. Рассмотрим третий случай:

- 1) Уравнение $f(t) = 0$ не имеет корней. Значит, дискриминант квадратного уравнения $f(t) = 0$ отрицателен:

$$(a + 1)^2 - 4a(5 - 2a) < 0 \Leftrightarrow 9a^2 - 18a + 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}; 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

Стоит отметить, что интервал целиком вложен во множество $a > 0$.

2) Все корни уравнения $f(t) = 0$ лежат в интервале $(-2; 2)$. Это верно, при выполнении трех условий:

- дискриминант квадратного уравнения $f(t) = 0$ неотрицателен;
- вершина параболы лежит на интервале $(-2; 2)$;
- $f(t)$ принимает положительные значения на краях интервала.

Получим соответствующую алгебраическую систему:

$$\begin{cases} a > 0, \\ (a+1)^2 - 4a(5-2a) \geq 0, \\ -2 < \frac{a+1}{2a} < 2, \\ 4a - 2(a+1) + (5-2a) > 0, \\ 4a + 2(a+1) + (5-2a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left(-\infty; 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right] \cup \left[1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right), \\ a > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left[1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right).$$

Объединяя ответы последних двух случаев, получим, что корней у исходного уравнения не будет при $a \in \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right)$.

8. В треугольной пирамиде $ABCD$ суммы трех плоских углов при каждой из вершин B и C равны 180° и $AD = BC$. Длина высоты пирамиды, опущенной из вершины A , равна 40 см. Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

Решение:

Сделаем плоскую развертку $EFGABC$ треугольной пирамиды в вершинах B и C , где грань DAB соответствует треугольнику FAB , грань DBC — GBC , грань DAC — EAC . Равные отрезки (в том числе, согласно условию) на рисунке отмечены одинаковыми засечками.

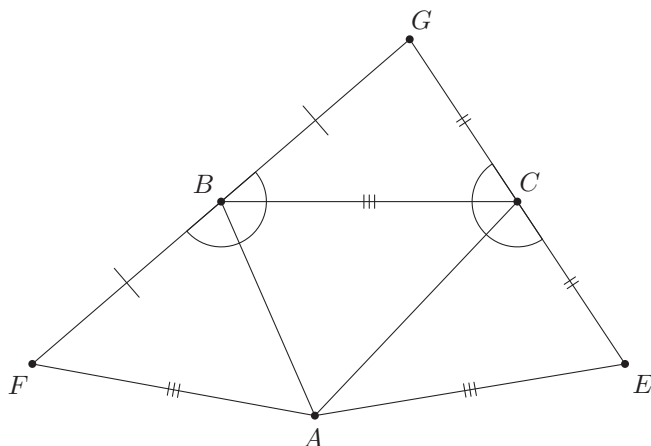


Рис. 10: к задаче №8

Докажем, что точка A лежит на EF . Действительно, отрезок BC является средней линией треугольника EFG , значит $EF = 2BC$. В тоже время $EA = AF = BC$. То есть в неравенстве треугольника $EF \leq EA + AF$ достигается равенство, что может быть только если A лежит на EF .

Значит, ABC — треугольник, образованный средними линиями треугольника EFG . Следовательно, треугольники ABF , CGB , ECA и BAC равны. То есть все грани пирамиды равны между собой.

Пусть V — объем пирамиды, h — длина высоты пирамиды, опущенной из вершины A , а r — радиус вписанного в пирамиду шара.

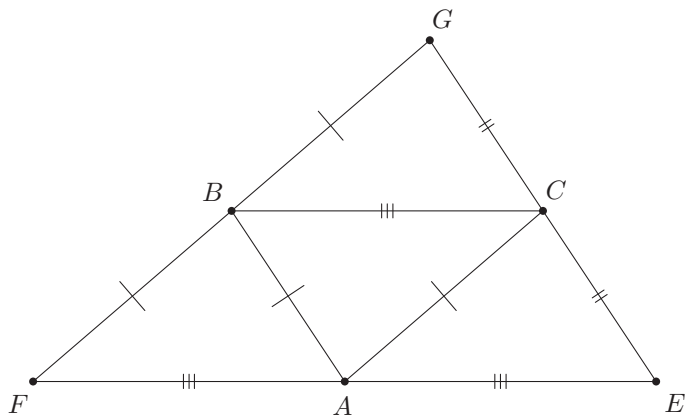


Рис. 11: к задаче №8

Поскольку все грани пирамиды равны, имеем:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h,$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (S_{ABC} + S_{DAB} + S_{DBC} + S_{DAC}) \cdot r = \frac{4}{3} \cdot S_{ABC} \cdot r.$$

Иными словами, $r = \frac{1}{4}h = 10$.

Ответ: 10 см.

2015 год

1 вариант

1. Какое из чисел больше и почему: 4,5 или $\sqrt{\frac{21}{8}} + \frac{17}{6}$?

Решение:

$$\frac{9}{2} - \frac{17}{6} \vee \sqrt{\frac{21}{8}} \Leftrightarrow \frac{5}{3} \vee \sqrt{\frac{21}{8}}$$

Возведем в квадрат обе части:

$$\frac{25}{9} \vee \frac{21}{8} \Leftrightarrow 25 \cdot 8 \vee 21 \cdot 9 \Leftrightarrow 200 \vee 189$$

Число слева больше.

Ответ: 4,5.

2. Решите уравнение

$$(x^2 - 8x + 16)(x^2 - 8x + 18) - 24 = 0.$$

Решение:

Сделаем замену:

$$t = (x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16 \geq 0.$$

Тогда уравнение приводится к квадратному

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

с корнями $t = 4$ и $t = -6$. Второй корень посторонний ($t \geq 0$). Отсюда получаем решения:

$$(x - 4)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 6. \end{cases}$$

Ответ: 2; 6.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{24} \cos x = \sqrt{11 \cos x - \cos 2x}.$$

Решение:

Сделаем замену:

$$\cos x = y \in [-1; 1].$$

Имеем уравнение с радикалами:

$$\sqrt{24}y = \sqrt{11y - (2y^2 - 1)}.$$

Поскольку справа стоит неотрицательное число, то с учетом $y \geq 0$ можно возвести уравнение в квадрат:

$$24y^2 = 11y - (2y^2 - 1) \Leftrightarrow 26y^2 - 11y - 1 = 0$$

Полученное квадратное уравнение имеет корни $y = \frac{1}{2}$ и $y = -\frac{1}{13}$, из которых второй посторонний, так как $y \geq 0$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 + 2xy = 40x, \\ 16x^2 + 8xy = 5y. \end{cases}$$

Решение:

Разложим на множители левые части уравнений:

$$\begin{cases} y(2x + y) = 40x, \\ 8x(2x + y) = 5y. \end{cases}$$

Если $x = 0$, то $y = 0$. Это является решением.

Если $x \neq 0$, то из первого уравнения $y \neq 0$ и $2x + y \neq 0$. Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{y}{8x} = \frac{8x}{y} \Rightarrow (y - 8x)(y + 8x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 8x, \\ y = -8x. \end{cases}$$

Подставляя $y = 8x$ в первое уравнение, получим уравнение: $80x^2 = 40x$. Откуда легко найти решение $x = \frac{1}{2}$, $y = 4$. Подставляя $y = -8x$, получим: $-48x^2 = -40x$. Откуда легко найти решение $x = \frac{5}{6}$, $y = -\frac{20}{3}$.

Ответ: $(0; 0)$; $(\frac{1}{2}; 4)$; $(\frac{5}{6}; -6\frac{2}{3})$.

5. Решите неравенство

$$\frac{\log_{25}(7 - \frac{x}{2})}{\log_{125}(22 - x)} \leq \frac{3}{4}.$$

Решение:

Выпишем область допустимых значений:

$$\begin{cases} 7 - \frac{x}{2} > 0, \\ 22 - x > 0, \\ 22 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 14).$$

Приведем логарифмы к основанию 5:

$$\frac{\frac{1}{2} \log_5(7 - \frac{x}{2})}{\frac{1}{3} \log_5(22 - x)} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\log_5(7 - \frac{x}{2})}{\log_5(22 - x)} \leq \frac{1}{2}.$$

С учетом допустимых значений получаем, что знаменатель всегда строго положителен, так как при $x < 14$ верно:

$$\log_5(22 - x) > \log_5(22 - 14) = \log_5 8 > 0.$$

Значит, можно домножить неравенство на положительный знаменатель:

$$2 \log_5 \left(7 - \frac{x}{2} \right) \leq \log_5 (22 - x).$$

Внесем множитель 2 в логарифм как степень и с учетом того, что основание логарифмов больше 1, получим:

$$\left(7 - \frac{x}{2} \right)^2 \leq 22 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 24x + 108 \leq 0, \\ 22 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [6; 18]$$

С учетом области допустимых значений, получаем окончательный ответ: $x \in [6; 14)$

Ответ: $[6; 14)$.

6. В треугольнике длины двух сторон равны 4 и 5, а длина биссектрисы угла между этими сторонами равна $\frac{20}{9}$. Найдите площадь этого треугольника.

Решение:

Подставим в формулу длины биссектрисы

$$l_b = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a + b}$$

все известные параметры

$$\frac{20}{9} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{4 + 5} \Leftrightarrow \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}.$$

Учитывая, что $\gamma \in (0; 180^\circ)$, получаем $\gamma = 120^\circ$.

Воспользуемся формулой площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = 5\sqrt{3}.$$

Ответ: $5\sqrt{3}$.

7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(x+1)^4 - (a+3)(x^2+2x) + a^2 + 3a + 1 = 0$$

имеет 4 различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

Решение:

После замены $t = (x+1)^2 \geq 0$ уравнение примет вид:

$$t^2 - (a+3)t + (a^2 + 4a + 4) = 0.$$

Каждый положительный корень $t > 0$ данного уравнения дает два различных корня x исходного уравнения. Каждый отрицательный корень $t < 0$ не дает корней x , а нулевой корень $t = 0$ дает только один корень $x = 0$.

Чтобы исходное уравнение имело 4 различных корня, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $t^2 - (a+3)t + (a^2 + 4a + 4) = 0$ имело два положительных корня t_1 и t_2 . Знак корней определяется теоремой Виета, а существование корней условием $D > 0$:

$$\begin{cases} a+3 > 0, \\ (a+2)^2 > 0, \\ (a+3)^2 - 4(a+2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{7}{3}; -2\right) \cup (-2; -1)$$

Считаем, что $t_1 > t_2$. Корни исходного уравнения, выписанные в порядке возрастания:

$$-1 - \sqrt{t_1} < -1 - \sqrt{t_2} < -1 + \sqrt{t_2} < -1 + \sqrt{t_1}.$$

Данные корни образуют арифметическую прогрессию тогда, и только тогда, когда соседние корни отличаются на одну и ту же величину:

$$(-\sqrt{t_2}) - (-\sqrt{t_1}) = \sqrt{t_2} - (-\sqrt{t_2}) = \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2}.$$

Эти соотношения эквивалентны условию $\sqrt{t_1} = 3\sqrt{t_2}$, то есть $t_1 = 9t_2$.

Согласно теореме Виета:

$$\begin{cases} 10t_2 = a + 3, \\ 9t_2^2 = (a + 2)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{9}{100}(a + 3)^2 = (a + 2)^2 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{7}, \\ a = -\frac{29}{13}. \end{cases}$$

Оба параметра a подходят, так как лежат во множестве $(-\frac{7}{3}; -2) \cup (-2; -1)$.

Ответ: $-2\frac{3}{13}; -1\frac{4}{7}$.

8. В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной S и основанием $ABCDEF$ площадь сечения SAC относится к площади боковой грани SAB как $\sqrt{51} : \sqrt{19}$. Сторона основания равна 3. Найти объем данной шестиугольной пирамиды.

Решение:

Введем обозначения: M — середина отрезка AB ; N — середина отрезка AC ; O — центр основания ($h = SO$ — высота пирамиды).

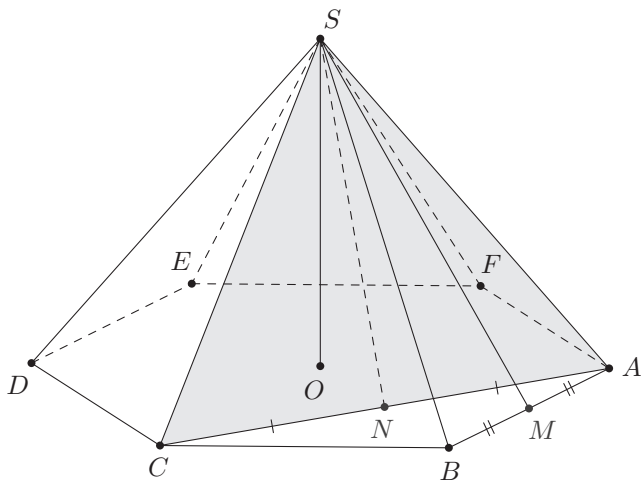


Рис. 12: к задаче №8

Найдем площадь основания пирамиды, которое образует правильный шестиугольник $ABCDEF$:

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{OAB} = \frac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

Из шестиугольника $ABCDEF$ несложно найти $OM = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $ON = \frac{3}{2}$. По теореме Пифагора для прямоугольных треугольников SON и SOM :

$$SN = \sqrt{h^2 + \frac{9}{4}},$$

$$SM = \sqrt{h^2 + \frac{27}{4}}.$$

Площади треугольников SAB и SAC :

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SM = \frac{3}{2} \sqrt{h^2 + \frac{27}{4}},$$

$$S_{SAC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot SN = \frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{h^2 + \frac{9}{4}}.$$

Согласно условию задачи:

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{h^2 + \frac{9}{4}}}{\frac{3}{2} \sqrt{h^2 + \frac{27}{4}}} = \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{19}}$$

Найдем высоту пирамиды:

$$\frac{h^2 + \frac{9}{4}}{h^2 + \frac{27}{4}} = \frac{17}{19} \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = 6.$$

Объем пирамиды:

$$V_{SABCDEF} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCDEF} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 27\sqrt{3}.$$

Ответ: $27\sqrt{3}$.

2016 год**1 вариант**

1. Сколько различных решений имеет уравнение

$$7x^2 + 6x + 7 = 2\sqrt{10} \cdot (x^2 - 1)?$$

Решение:

Запишем квадратное уравнение в стандартном виде:

$$(7 - 2\sqrt{10})x^2 + 6x + (7 + 2\sqrt{10}) = 0.$$

Вычислим дискриминант: $D = 36 - 4(7 - 2\sqrt{10})(7 + 2\sqrt{10}) = 36 - 36 = 0$.

Ответ: 1 корень.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ x^3 - y^3 = 335. \end{cases}.$$

Решение:

Разложим на множители второе уравнение: $(x - y)(x^2 + y^2 + xy) = 5 \cdot 67$. Так как $x - y = 5$, то получаем, что $x^2 + y^2 + xy = 67$. Выделим полный квадрат и подставим первое соотношение: $(x - y)^2 + 3xy = 67 \Leftrightarrow xy = 14$. Получаем систему:

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = 14. \end{cases}$$

Выражая из первого соотношения $x = y + 5$ и подставляя во второе, получим квадратное уравнение $(y + 5)y = 67$ с решениями $y = 2$ и $y = -7$. Соответствующие x равные 7 и -2 .

Ответ: $(7; 2); (-2; -7)$.

3. Дана квадратная таблица 10×10 клеток (10 строк, 10 столбцов). В каждой клетке таблицы стоит число. Известно, что при переходе из любой клетки в соседнюю с ней клетку, расположенную ниже, число увеличивается на 4, а при переходе из любой клетки в соседнюю с ней клетку справа число уменьшается на 1. Сумма всех чисел в таблице равна 250. Какое число стоит в самой левой клетке нижнего ряда?

Решение:

Пронумеруем строки снизу вверх от 1 до 10. Рассмотрим все числа, записанные в k -й строке. Они образуют арифметическую прогрессию с разностью (-1) (слева направо). Если первое число в строке равно a_k , то последнее число равно $a_k - 9$.

a_{10}	$a_{10} - 1$	...	$a_{10} - 8$	$a_{10} - 9$
a_9	$a_9 - 1$	...	$a_9 - 8$	$a_9 - 9$
...	...	...	...	...
a_k	$a_k - 1$	...	$a_k - 8$	$a_k - 9$
...	...	...	...	...
a_2	$a_2 - 1$	...	$a_2 - 8$	$a_2 - 9$
a_1	$a_1 - 1$	...	$a_1 - 8$	$a_1 - 9$

Легко найти сумму всех чисел в k -й строке:

$$S_k = \frac{a_k + (a_k - 9)}{2} \cdot 10 = 10a_k - 45.$$

Если сложить все суммы строк S_k , то получим сумму всех чисел в таблице:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + \dots + S_{10} = \\ &= (10a_1 - 45) + (10a_2 - 45) + \dots + (10a_{10} - 45) = 10(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) - 450. \end{aligned}$$

Заметим, что числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, записанные в первом столбце, образуют арифметическую прогрессию с разностью (-4) (снизу вверх). Поэтому число в верхней строке: $a_{10} = a_1 - 9 \cdot 4 = a_1 - 36$.

А сумму всех чисел в левом столбце можно найти как сумму арифметической прогрессии:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 10(a_1 - 18).$$

Значит, сумма всех чисел таблицы равна $S = 100(a_1 - 18) - 450$. Исходя из условия, что $S = 250$, несложно найти $a_1 = 25$.

Ответ: 25.

4. Решите неравенство

$$\sqrt{7 + 2^{\log_x 5}} \geq 1 + 4^{\log_x \sqrt{5}}.$$

Решение:

Замена $t = \log_x 5$. Выражение справа: $4^{\log_x \sqrt{5}} = 4^{\frac{t}{2}} = 2^t$. При подстановке получим неравенство:

$$\sqrt{7 + 2^t} \geq 1 + 2^t.$$

Сделаем еще одну замену: $a = 2^t > 0$. Это приводит к стандартному неравенству с радикалами:

$$\sqrt{7 + a} \geq 1 + a.$$

Так как $a > 0$, то правая часть всегда положительна. Возведем обе части неравенства в квадрат:

$$7 + a \geq 1 + 2a + a^2 \Leftrightarrow a^2 + a - 6 \leq 0.$$

Данное квадратичное неравенство имеет решение $a \in [-3, 2]$. Вернемся к переменной t :

$$\begin{cases} 2^t \geq -3, \\ 2^t \leq 2 \end{cases}$$

Первое неравенство всегда верно. Соответственно, данная система эквивалентна неравенству $t \leq 1$. Перейдем к переменной x :

$$\log_x 5 \leq 1 \Leftrightarrow \log_x 5 \leq \log_x x$$

Если $0 < x < 1$, то при снятии логарифмов знак меняется на противоположный: $5 \geq x$. Ответом будет интервал $x \in (0, 1)$.

Если же $x > 1$, то при снятии логарифмов знак остается: $5 \leq x$. Ответом будет полуинтервал $x \in [5, +\infty)$.

Ответ: $(0; 1) \cup [5; +\infty)$.

5. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x = 9 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x.$$

Решение:

Запишем синус двойного угла ($2 \sin x \cos x = \sin 2x$):

$$\operatorname{tg} 2x = 9 \sin^2 x + 2 \sin 2x - 3 \cos^2 x.$$

Выразим тангенс ($\sin 2x = \operatorname{tg} 2x \cos 2x$) и сгруппируем выражения:

$$\operatorname{tg} 2x = 9 \sin^2 x + 2 \operatorname{tg} 2x \cos 2x - 3 \cos^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x(1 - 2 \cos 2x) = 3(3 \sin^2 x - \cos^2 x).$$

С помощью формул понижения выразим правую часть через $\cos 2x$:

$$3 \sin^2 x - \cos^2 x = \frac{3}{2}(1 - \cos 2x) - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = 1 - 2 \cos 2x$$

Разложим на множители:

$$\operatorname{tg} 2x(1 - 2 \cos 2x) = 3(1 - 2 \cos 2x)$$

$$(\operatorname{tg} 2x - 3)(1 - 2 \cos 2x) = 0.$$

Приравняем к нулю первый множитель:

$$\operatorname{tg} 2x = 3 \Leftrightarrow 2x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Приравняем к нулю второй множитель:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

6. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AD в $\sqrt{\frac{19}{4}}$ раз длиннее стороны BC и $AB = CD = 2$. Продолжения сторон AB (за точку B) и DC (за точку C) пересекаются в точке K , при этом $BK = 1$, $CK = 2$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

Решение:

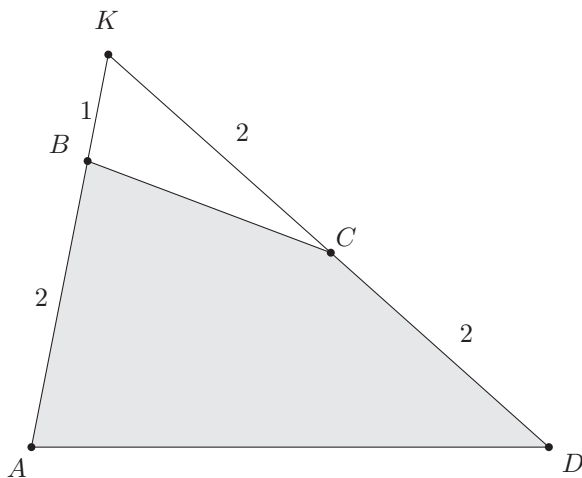


Рис. 13: к задаче №6

Обозначим $\angle AKD = \alpha$. Выпишем теорему косинусов для треугольников AKD и BKC :

$$AD^2 = AK^2 + KD^2 - 2 \cdot AK \cdot KD \cdot \cos \alpha = 25 - 24 \cos \alpha$$

$$BC^2 = BK^2 + KC^2 - 2 \cdot BK \cdot KC \cdot \cos \alpha = 5 - 4 \cos \alpha$$

Подставим в соотношение $\frac{AD^2}{BC^2} = \frac{19}{4}$ полученные выше выражения для AD^2 и BC^2 :

$$\frac{25 - 24 \cos \alpha}{5 - 4 \cos \alpha} = \frac{19}{4} \Leftrightarrow 100 - 96 \cos \alpha = 95 - 76 \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4}.$$

Далее по основному тригонометрическому тождеству легко найти $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ и площадь $ABCD$ как разность площадей треугольников AKD и BKC :

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{AKD} - S_{BKC} = \frac{1}{2} AK \cdot KD \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} BK \cdot KC \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{\sin \alpha}{2} (AK \cdot KD - BK \cdot KC) = \frac{5\sqrt{15}}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{15}}{4}$.

7. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\cos \frac{(10x - 48)\pi}{3x + 5} = 1.$$

Решение:

$$\frac{(10x - 48)\pi}{3x + 5} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Преобразуем уравнение с двумя неизвестными:

$$5x - 24 = n(3x + 5) \Leftrightarrow 3nx + 5n - 5x + 24 = 0.$$

Техника решения уравнений данного типа стандартна: разложим левую часть на два множителя так, чтобы в правой части было некоторое целое число, не зависящее от n и x .

$$n(3x + 5) - 5x + 24 = 0.$$

Для разложения на множители с целыми коэффициентами, домножим всё уравнение на 3:

$$\begin{aligned} 3n(3x + 5) - 5 \cdot 3x + 72 = 0 &\Leftrightarrow 3n(3x + 5) - 5(3x + 5) + 97 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3n - 5)(3x + 5) = -97. \end{aligned}$$

Число 97 — простое (делится только на себя и на 1). Поэтому произведение двух целых чисел равно (-97) только в том случае, если это одна из пар чисел $(97, -1)$, $(1, -97)$, $(-1, 97)$ или $(-97, 1)$. Подставляя каждую из этих пар, получим системы:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3n - 5 = 97, \\ 3x + 5 = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} n = 34, \\ x = -2 \end{cases} \quad . \\ \begin{cases} 3n - 5 = 1, \\ 3x + 5 = -97 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} n = 2, \\ x = -34 \end{cases} \quad . \\ \begin{cases} 3n - 5 = -1, \\ 3x + 5 = 97 \end{cases} &\Leftrightarrow \emptyset, \quad \begin{cases} 3n - 5 = -97, \\ 3x + 5 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \emptyset. \end{aligned}$$

Ответ: $-34; -2$.

8. В правильной треугольной пирамиде радиус вписанного шара в 3 раза короче высоты и равен $7 + \sqrt{21}$. Найдите радиус шара, который касается всех ребер пирамиды.

Решение:

Обозначим r и O — радиус и центр шара, касающегося всех граней, R и Q — радиус и центр шара, касающегося всех ребер. Проведем высоту пирамиды SH . В силу симметрии (по условию

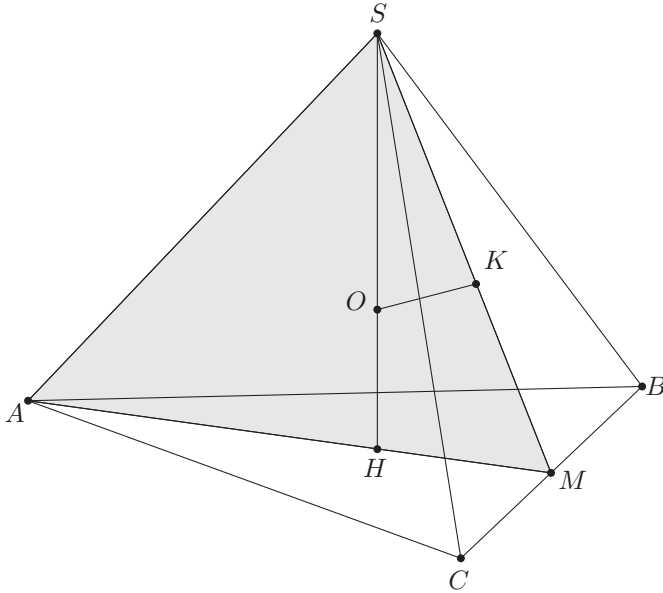


Рис. 14: к задаче №8

пирамида — правильная) центры O и Q лежат на SH . Также известно, что $SH = 3r$ и $SO = 2r$.

Выразим все стороны пирамиды через r . Введем обозначения: M — середина стороны BC , K — точка касания вписанного шара с плоскостью SBC . Плоскость ASM перпендикулярна плоскости SBC . Следовательно, K лежит на SM .

Известно, что $\frac{OK}{OS} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$. Значит, угол $\angle OSK = 30^\circ$, $SK = \sqrt{3} \cdot r$. Так как треугольники SOK и SMH — подобны ($\angle K = \angle H = 90^\circ$, $\angle S$ — общий), то верно:

$$HM = \sqrt{3} \cdot r, MS = 2\sqrt{3} \cdot r.$$

Из равностороннего треугольника ABC легко получить:

$$AM = 3\sqrt{3}r, AH = 2\sqrt{3}r, CM = 3r.$$

Из прямоугольного треугольника MSC по теореме Пифагора можно найти $SC = \sqrt{21}r$. Соответственно:

$$SA = SB = SC = \sqrt{21}r.$$

Перейдем к нахождению соотношения между R и r . Обозначим через L — точку касания шара с центром Q и радиуса R ребра AS .

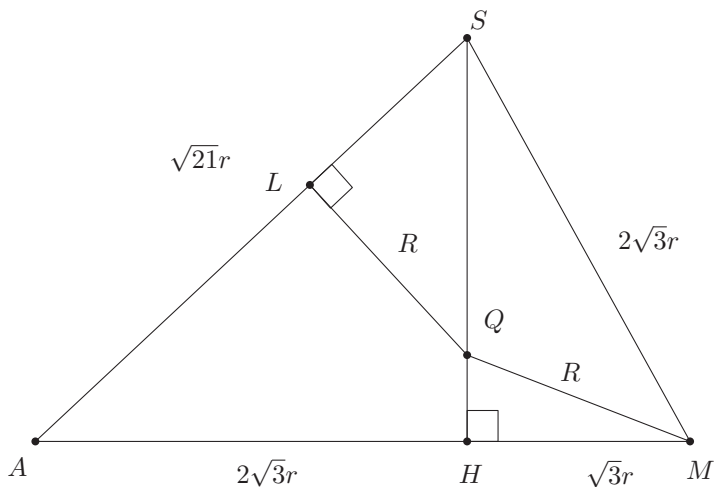


Рис. 15: к задаче №8

Треугольники ASH и QSL подобны:

$$SQ = \frac{LQ}{HA} \cdot SA = \frac{R}{2\sqrt{3} \cdot r} \sqrt{21} \cdot r = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot R.$$

Соответственно:

$$QH = SH - SQ = 3r - \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot R.$$

Чтобы найти явную связь между R и r , выпишем теорему Пифагора для треугольника QHM :

$$R^2 = \left(\sqrt{3} \cdot r\right)^2 + \left(3r - \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot R\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = 12r^2 - 3\sqrt{7} \cdot rR + \frac{3}{4}R^2$$

Поделим уравнение на r^2 и обозначим $t = \frac{R}{r}$:

$$3t^2 - 12\sqrt{7}t + 48 = 0.$$

Дискриминант квадратного уравнения: $D = 12^2 \cdot 7 - 4 \cdot 3 \cdot 48 = 6^2 \cdot 3$.
Значит:

$$t = 2(\sqrt{7} \pm \sqrt{3}).$$

Большой корень посторонний, так как из треугольника SHM получаем, что:

$$QM < SM \Leftrightarrow R < 2\sqrt{3}r \Leftrightarrow t < 2\sqrt{3}.$$

Для меньшего корня несложно найти ответ:

$$R = 2(\sqrt{7} - \sqrt{3})r = 2(\sqrt{7} - \sqrt{3})(7 + \sqrt{21}) = 8\sqrt{7}.$$

Ответ: $8\sqrt{7}$.

2017 год

1 вариант

1. Найдите все целые числа, которые лежат между числами $\sqrt{3} \cdot \sqrt{85}$ и $\frac{14-1,7}{3-2,3}$.

Решение:

Оценим первое число:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{85} = \sqrt{255} \in (15, 16)$$

Оценим второе число:

$$\frac{14 - 1,7}{3 - 2,3} = \frac{12,3}{0,7} = \frac{123}{7} = 17\frac{4}{7} \in (17, 18).$$

Ответ: 16; 17.

2. Решите уравнение $|x^2 - 14x + 48| = 14x - 42 - x^2$.

Решение:

Сделаем замену выражения под модулем $t = x^2 - 14x + 48$. Тогда правая часть выражается как $6 - (x^2 - 14x + 48) = 6 - t$:

$$|t| = 6 - t.$$

Раскроем модуль. В случае $t \geq 0$:

$$t = 6 - t$$

$$t = 3$$

При возврате к исходной переменной x получаем квадратное уравнение $x^2 - 14x + 45 = 0$. Корни $x = 5$ и $x = 9$.

В случае $t < 0$:

$$-t = 6 - t$$

$$0 = 6$$

В данном случае решений нет.

Ответ: 5; 9.

3. В 9 коробках с номерами от 1 до 9 лежат только красные и синие шары. Число красных шаров во второй коробке в $\frac{7}{6}$ раз больше, чем в первой. Количества красных шаров в коробках образуют арифметическую прогрессию, а количества синих шаров в коробках образуют геометрическую прогрессию (в порядке номеров коробок). Количество синих шаров в первой коробке составляет 25%, а в третьей — 50% от числа всех шаров в данной коробке. Найти отношение общего числа синих шаров к общему числу красных шаров.

Решение:

Обозначим a_i — количество красных шаров в i -й коробке (арифметическая прогрессия), b_i — количество синих шаров в i -й коробке (геометрическая прогрессия). По условию:

$$\begin{cases} a_2 = \frac{7}{6}a_1 \\ b_1 = 0.25(a_1 + b_1) \\ b_3 = 0.5(a_3 + b_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a_2 = 7a_1 \\ 3b_1 = a_1 \\ b_3 = a_3 \end{cases}$$

Пусть d — разность арифметической прогрессии (a_i) , q — знаменатель геометрической прогрессии (b_i) . Подставим $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $b_3 = b_1 q^2$ и выразим все неизвестные через d :

$$\begin{cases} 6(a_1 + d) = 7a_1 \\ 3b_1 = a_1 \\ b_1 \cdot q^2 = a_1 + 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6d \\ b_1 = 2d \\ 2d \cdot q^2 = 8d \end{cases}$$

Из последнего уравнения получаем, что либо $d = 0$, либо $q^2 = 4$. В первом случае $a_1 = b_1 = 0$ — означает, что все корзины пустые. Во втором случае подходит только $q = 2$, так как количество шаров $b_2 = b_1 \cdot q$ не может быть отрицательным.

Найдем общее количество красных шаров (сумма членов арифметической прогрессии):

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{6d + 14d}{2} \cdot 9 = 90d$$

Найдем общее количество синих шаров (сумма членов геометрической прогрессии):

$$b_1 + b_2 + \dots + b_9 = \frac{q^9 - 1}{q - 1} \cdot b_1 = 511 \cdot 2d = 1022d$$

Ответ: $\frac{511}{45}$.

4. Решите уравнение

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решение:

Раскроем синус суммы:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 2x + \cos 2x - \sqrt{2} \sin x = 1$$

Применим формулы двойного угла для синуса и для косинуса:

$$2 \sin x \cos x + 1 - 2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x = 1$$

$$(2 \cos x - 2 \sin x - \sqrt{2}) \sin x = 0$$

В первом случае:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Во втором случае:

$$\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

По формуле дополнительного аргумента

$$\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Отдельно выпишем ответ для каждого знака:

$$\begin{cases} x = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\log_y x} = \frac{y^2}{x}, \\ (\log_3 x^2) \cdot \log_x \left(2x - \frac{3}{y}\right) = 4 \end{cases}$$

Решение:

Выпишем область допустимых значений: $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1, xy > \frac{3}{2}$.

Рассмотрим второе уравнение. Применим формулу $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$:

$$2 \log_3 x \log_x \left(2x - \frac{3}{y}\right) = 4 \Leftrightarrow \log_3 \left(2x - \frac{3}{y}\right) = 2 \Leftrightarrow 2x - \frac{3}{y} = 9$$

Прологарифмируем первое уравнение по основанию x :

$$\log_y x = 2 \log_x y - 1$$

Сделаем замену $\log_y x = t$:

$$t = \frac{2}{t} - 1 \Leftrightarrow \frac{t^2 + t - 2}{t} = 0$$

Корни: $t = 1, t = -2$. Возвращаясь к переменным x и y , получаем два случая: $\log_y x = 1$ или $\log_y x = -2$.

1) В первом случае $x = y$. Второе уравнение примет вид:

$$2x - \frac{3}{x} = 9 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 9x - 3}{x} = 0$$

Первое решение $x = \frac{9-\sqrt{105}}{4}$ не удовлетворяет условию $x > 0$.

Второе решение $x = \frac{9+\sqrt{105}}{4}$ подходит, так как

$$xy = x^2 = \left(\frac{9+\sqrt{105}}{4}\right)^2 > \left(\frac{18}{4}\right)^2 > \frac{3}{2}.$$

2) Во втором случае $x = \frac{1}{y^2}$. Второе уравнение:

$$\frac{2}{y^2} - \frac{3}{y} = 9 \Leftrightarrow \frac{9y^2 + 3y - 2}{y^2} = 0$$

Первое решение $y = -\frac{2}{3}$ отбрасываем ($y > 0$ не выполняется).

Второе решение $y = \frac{1}{3}$ дает $x = 9$, что удовлетворяет области допустимых значений.

Ответ: $(9; \frac{1}{3}), (\frac{9+\sqrt{105}}{4}; \frac{9+\sqrt{105}}{4})$.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle C = 60^\circ$, $AD = 21$, $BC = 40$. Окружность с центром на стороне BC касается сторон AB , AD и CD . Найдите длины сторон AB и CD .

Решение:

Первое дополнительное построение: продолжим стороны BA и CD до пересечения в точке K . Так как два угла треугольника BSK равны по 60° , то он будет правильным. Причем длины всех сторон треугольника равны 40.

Обозначим $AB = x$, $CD = y$. Получаем, что $AK = 40 - x$, $DK = 40 - y$. Теорема косинусов для треугольника KAD дает:

$$(40 - x)^2 + (40 - y)^2 - 2(40 - x)(40 - y) \cdot \frac{1}{2} = 21^2$$

Второе дополнительное построение: проведем радиусы OF , OH и OE к точкам касания с BA , AD и DC , соответственно. Треугольники OBF и OCE — равные прямоугольные треугольники ($\angle B = \angle C = 60^\circ$, $OF = OE$ как радиусы). Значит, $BO =$

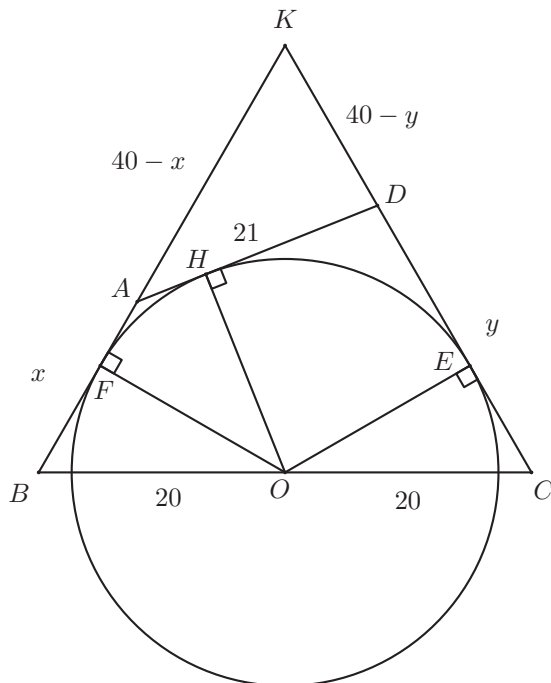


Рис. 16: к задаче №6

$OC = 20$. Из этих же прямоугольных треугольников получаем, что $BF = CE = 10$. Следовательно, $AF = x - 10$, $DE = y - 10$.

Заметим, что, по свойству касательных: $AH = AF = x - 10$, $DH = DE = y - 10$. По условию $AD = 21$. Следовательно,

$$(x - 10) + (y - 10) = 21$$

$$x + y = 41$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (40 - x)^2 + (40 - y)^2 - 2(40 - x)(40 - y) \cdot \frac{1}{2} = 21^2 \\ x + y = 41 \end{cases}$$

Находим, что $40 - y = x - 1$ и подставляем в первое уравнение:

$$(40 - x)^2 + (x - 1)^2 - (40 - x)(x - 1) = 21^2$$

$$3x^2 - 123x + 1200 = 0$$

$$x^2 - 41x + 400 = 0$$

Получаем, что $x = 16$ или $x = 25$. Значения второй неизвестной: $y = 25$ и $y = 16$, соответственно. Простая проверка показывает, что оба случая возможны.

Ответ: (25; 16) и (16; 25).

7. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$13 + \sin^2 x > 3a^2 - a + (4a - 5) \cos x$$

выполняется для всех x .

Решение:

Обозначим $t = \cos x$. Неравенство перепишем в виде:

$$13 + 1 - t^2 > 3a^2 - a + (4a - 5)t$$

$$t^2 + (4a - 5)t + (3a^2 - a - 14) < 0$$

Необходимо найти все значения параметра a , при которых данное неравенство выполняется при всех $t \in [-1; 1]$.

График функции $f(t) = t^2 + (4a - 5)t + (3a^2 - a - 14)$ — парабола с ветвями, направленными вверх и является выпуклой функцией. Для того, чтобы неравенство $f(t) < 0$ выполнялось при всех $t \in [-1, 1]$, необходимо и достаточно потребовать, чтобы $f(-1) < 0$ и $f(1) < 0$. Действительно, если эта пара неравенств выполняется, то $f(t) < 0$ при все $t \in [-1, 1]$ в силу выпуклости функции. Обратное утверждение очевидно.

$$\begin{cases} 1 + (4a - 5) + 3a^2 - a - 14 < 0, \\ 1 - (4a - 5) + 3a^2 - a - 14 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 6 < 0, \\ 3a^2 - 5a - 8 < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-3; 2), \\ a \in (-1; \frac{8}{3}), \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-1; 2)$$

Ответ: $(-1; 2)$.

8. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ (S — вершина пирамиды) вписан шар. Через центр шара и ребро AB проведена плоскость, которая в пересечении с пирамидой дает четырехугольник $ABMN$. Объемы пирамид $SABMN$ и $SABCD$ относятся как $5 : 9$. Найдите косинус двугранного угла между боковой гранью и основанием исходной пирамиды.

Решение:

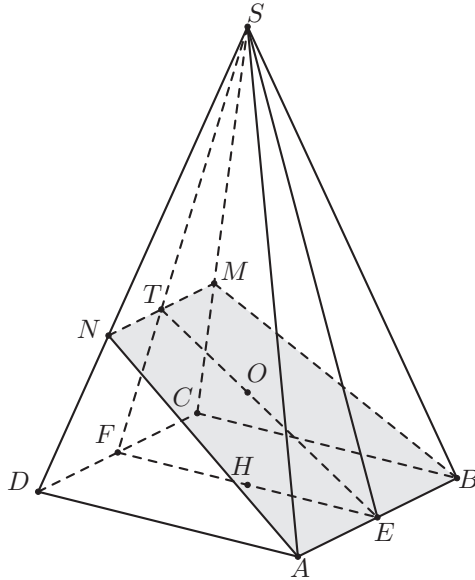


Рис. 17: к задаче №8

Искомый двугранный угол обозначим $\angle SEH = \alpha$. Длину апофемы обозначим $SF = SE = b$. Стороны основания тогда равны $a = 2b \cos \alpha$.

Пусть T , E , F , H — середины сторон NM , AB , CD и EF , соответственно. Четырехугольник $ABMN$ — плоский. Значит, либо прямая AB пересекает MN на прямой CD (общая прямая граней $MNCD$ и $ABCD$), либо все три прямые параллельны. Первый вариант невозможен, так как прямая AB параллельна CD . Получаем, что $ABMN$ — трапеция. Так как пирамида $SABCD$ — правильная, то все боковые грани являются равнобедренными треугольниками. Значит, $DCMN$ — равнобедренная трапеция. Тогда треугольники AND и BMC равны и, следовательно, трапеция $ABMN$ — равнобедренная. Центр шара O будет лежать на прямой TE и будет центром вписанной окружности треугольника SEF .

Объем пирамиды $SABMN$ равен $\frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ABMN}$, где h — расстояние от вершины S до плоскости $ABMN$. Так как O — центр вписанной в треугольник SFE окружности, то $\angle SET = \frac{\alpha}{2}$. Поэтому $h = SE \cdot \sin \angle SET = SE \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$. Объем пирамиды $SABCD$ равен $\frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD}$. Отношение объемов равно:

$$\frac{5}{9} = \frac{S_{ABMN} \cdot SE \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{S_{ABCD} \cdot SH} = \frac{(AB + MN) \cdot TE \cdot SE \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cdot AB^2 \cdot SH}$$

Выразим все через a , b .

Ясно, что ET — биссектриса угла SEF . По формуле для биссектрисы:

$$ET = \frac{2ab \cos \frac{\alpha}{2}}{a + b}$$

Длину MN определим из подобия треугольников SMN и SCD : $\frac{MN}{CD} = \frac{ST}{SF}$. По свойству биссектрисы имеем: $\frac{ST}{TF} = \frac{SE}{EF}$. Это значит, что $\frac{ST}{SF} = \frac{SE}{SE+EF} = \frac{b}{b+a}$. Получаем:

$$MN = \frac{ab}{a + b}.$$

Длину SH найдем из прямоугольного треугольника SHE :

$$SH = b \sin \alpha.$$

Для отношения объемов имеем:

$$\frac{5}{9} = \frac{(a + \frac{ab}{a+b}) \cdot \frac{2ab \cos \frac{\alpha}{2}}{a+b} \cdot b \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cdot a^2 \cdot b \cdot \sin \alpha} = \frac{(1 + \frac{b}{a+b}) \cdot \frac{1}{a+b} \cdot b}{2} = \frac{ab + 2b^2}{2(a+b)^2}$$

Пусть $t = \cos \alpha$:

$$\frac{5}{9} = \frac{2b^2t + 2b^2}{2(2bt + b)^2} = \frac{t + 1}{(2t + 1)^2}$$

$$20t^2 + 20t + 5 = 9t + 9 \Leftrightarrow 20t^2 + 11t - 4 = 0$$

Из двух корней $t = -\frac{4}{5}$ и $t = \frac{1}{4}$ подходящим является только положительный, так как двугранный угол при основании пирамиды не может быть тупым.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

2018 год

1 вариант

1. Какое целое число задано выражением $\frac{\sqrt{8} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot \sqrt{32}}$?

Решение:

Простые вычисления сразу приводят к ответу:

$$\frac{\sqrt{8} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot \sqrt{32}} = \frac{\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{5}\right)}{2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{28}{15}}{2 \cdot \frac{7}{15}} = 2.$$

Ответ: 2.

2. Решить уравнение:

$$\sqrt{10x + 6} = 5x - 9.$$

Решение:

Выражение слева неотрицательно, поэтому выражение справа тоже:

$$5x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{5}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$10x + 6 = 25x^2 - 90x + 81 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Из двух корней $x = 1$, $x = 3$ подходит только $x = 3$.

Ответ: 3.

3. Решить неравенство:

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{x}} \leq \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3-x}}.$$

Решение:

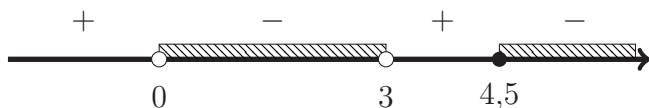
Приведем обе степени к основанию $\frac{3}{2}$.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{6}{x}} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3-x}}$$

Основание $\frac{3}{2} > 1$, поэтому для показателей знак неравенства сохраняется:

$$-\frac{6}{x} \leq \frac{2}{3-x} \Leftrightarrow \frac{-6(3-x) - 2x}{x(3-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x - 18}{x(3-x)} \leq 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



$$x \in (0; 3) \cup [4, 5; +\infty)$$

Ответ: $x \in (0; 3) \cup [4, 5; +\infty)$.

4. В геометрической прогрессии 50 членов (все положительные). Если просуммировать логарифмы по основанию 2 от каждого члена прогрессии, то получится 1325. Если вычислить сумму логарифмов по основанию 2 только первых 30 членов, то получится 495. Вычислите сумму первых 10 членов прогрессии.

Решение:

Обозначим члены прогрессии через $b_1, b_2, \dots, b_{50}$, а через q — знаменатель геометрической прогрессии. С учетом того, что $b_k = b_1 q^{k-1}$, преобразуем сумму логарифмов по основанию 2 первых n членов:

$$\log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \dots + \log_2 b_n = \log_2 (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n) =$$

$$\begin{aligned}
&= \log_2 (b_1 \cdot b_1 \cdot q \cdot b_1 \cdot q^2 \cdot \dots \cdot b_1 \cdot q^{n-1}) = \log_2 (b_1^n \cdot q^{1+2+3+\dots+(n-1)}) = \\
&= n \log_2 b_1 + (1+2+3+\dots+(n-1)) \cdot \log_2 q = n \log_2 b_1 + \frac{n(n-1)}{2} \log_2 q
\end{aligned}$$

Теперь перепишем условие задачи в виде следующих уравнений:

$$\begin{cases} 50 \log_2 b_1 + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot \log_2 q = 1325 \\ 30 \log_2 b_1 + \frac{30 \cdot 29}{2} \cdot \log_2 q = 495 \end{cases}$$

После сокращений имеем:

$$\begin{cases} 2 \log_2 b_1 + 49 \log_2 q = 53 \\ 2 \log_2 b_1 + 29 \log_2 q = 33 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе: $\log_2 q = 1$, то есть $q = 2$. Соответственно, $\log_2 b_1 = 2$, то есть $b_1 = 4$.

Остается найти сумму первых 10 членов геометрической прогрессии:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \cdot b_1 = (2^{10} - 1) \cdot 4 = 4092.$$

Ответ: 4092.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5 \sin y - 3\sqrt{5} \cos x = 7 - 2 \cos^2 y, \\ \operatorname{tg} x = 2. \end{cases}$$

Решение:

Решим второе уравнение:

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Найдем $\cos x$ из второго уравнения и основного тригонометрического тождества:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

Согласуем знак $\cos x$ с решениями второго уравнения.

- 1) Если угол x лежит в первой четверти, то $x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ и $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$5 \sin y - 3 = 7 - 2 \cos^2 y$$

Замена: $t = \sin y \in [-1, 1]$.

$$5t - 3 = 7 - 2(1 - t^2)$$

$$2t^2 - 5t + 8 = 0$$

Решений нет.

- 2) Если угол x лежит в третьей четверти, то $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ и $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$5 \sin y + 3 = 7 - 2 \cos^2 y$$

Замена $t = \sin y \in [-1, 1]$.

$$5t + 3 = 7 - 2(1 - t^2)$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

Из двух решений $t = 2, t = \frac{1}{2}$ подходит только второе: $\sin y = \frac{1}{2}$. То есть

$$y = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi k; (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m \right), k, m \in \mathbb{Z}.$

6. В треугольнике ABC со сторонами: $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$ проведены высоты AH_1 , BH_2 , CH_3 . Найдите отношение длин отрезков $H_1H_3 : H_2H_3$.

Решение:

Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Определим $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ по теореме косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16} > 0,$$

$$\cos \beta = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC} = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8} > 0,$$

$$\cos \gamma = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2 \cdot CA \cdot CB} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{3}{4} > 0.$$

Ясно, что треугольник ABC остроугольный.

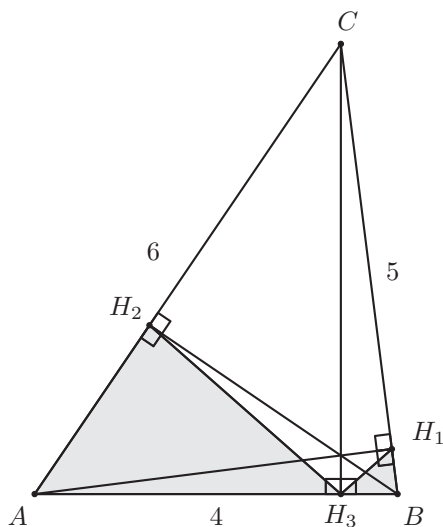


Рис. 18: к задаче №6

Треугольник AH_2H_3 подобен треугольнику ABC , так как угол A — общий, а прилежащие стороны пропорциональны, то есть

$$\frac{AH_2}{AB} = \cos \alpha = \frac{AH_3}{AC}.$$

Следовательно:

$$\frac{H_2H_3}{BC} = \cos \alpha$$

$$H_2H_3 = BC \cdot \cos \alpha = 5 \cdot \frac{9}{16} = \frac{45}{16}$$

Аналогично, треугольник BH_1H_3 подобен треугольнику BAC , так как угол B — общий, а прилежащие стороны пропорциональны (коэффициент подобия равен $\cos \beta$). Следовательно,

$$\frac{H_1H_3}{AC} = \cos \beta,$$

$$H_1H_3 = AC \cdot \cos \beta = 6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

Находим ответ: $\frac{H_1H_3}{H_2H_3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{45} = \frac{4}{15}$.

Ответ: 4 : 15.

7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$|(2-a)x - a| = (2-a)(x+1)^2 + 2ax - 2x + 2a$$

имеет ровно одно решение.

Решение:

Сделаем замену переменной $t = x + 1$:

$$|(2-a)t - 2| = (2-a)t^2 + (2a-2)t + 2$$

и замену параметра $b = 2 - a$:

$$|bt - 2| = bt^2 + (2-2b)t + 2.$$

Легко убедиться, что $t = 0$ является решением при любых значениях параметра b . Достаточно выяснить такие b , что отличных от нуля решений нет.

Если $b = 0$, то уравнение примет вид:

$$2 = 2t + 2,$$

которое как раз имеет только решение 0. Соответственно, $a = 2$ включим в ответ.

Пусть $b \neq 0$. Замена $z = bt$. Тогда $t = \frac{z}{b}$.

$$|z - 2| = \frac{z^2}{b} + \frac{(2 - 2b)z}{b} + 2$$

$$b|z - 2| = z^2 + (2 - 2b)z + 2b$$

Определим параметры b такие, что уравнение не имеет решений z отличных от нуля ни в одном из двух случаев, которые образуются при раскрытии модуля:

1) Пусть $z \geq 2$:

$$bz - 2b = z^2 + (2 - 2b)z + 2b$$

$$z^2 + (2 - 3b)z + 4b = 0$$

Уравнение не должно иметь решений $z \geq 2$. То есть либо корней нет, либо корни меньше 2. Обозначим $f(z) = z^2 + (2 - 3b)z + 4b$.

В первом случае $D < 0$:

$$(2 - 3b)^2 - 16b < 0 \Leftrightarrow 9b^2 - 28b + 4 < 0 \Leftrightarrow$$

$$b \in \left(\frac{14 - 4\sqrt{10}}{9}; \frac{14 + 4\sqrt{10}}{9} \right)$$

Во втором случае корни меньше 2:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} D \geq 0, \\ z_{\text{в}} < 2, \\ f(2) > 0. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b \in \left(-\infty; \frac{14-4\sqrt{10}}{9}\right] \cup \left[\frac{14+4\sqrt{10}}{9}; +\infty\right) \\ -\frac{2-3b}{2} < 2, \\ 4 + (2-3b) \cdot 2 + 4b > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} b \in \left(-\infty; \frac{14-4\sqrt{10}}{9}\right] \cup \left[\frac{14+4\sqrt{10}}{9}; +\infty\right) \\ b < 2, \\ b < 4. \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow b \in \left(-\infty; \frac{14-4\sqrt{10}}{9}\right]
 \end{aligned}$$

Значит, корней $z \geq 2$ не будет при

$$b \in \left(-\infty; \frac{14+4\sqrt{10}}{9}\right]$$

2) Пусть $z < 2$.

$$2b - bz = z^2 + (2 - 2b)z + 2b$$

$$z^2 + (2 - b)z = 0$$

Решение $z = 0$ будет в любом случае. А решение $z = b - 2$ должно быть посторонним или совпадать с первым решением. В первом случае $b - 2 \geq 2$, то есть $b \geq 4$. Во втором случае $b = 2$.

Значит, корней $z < 2$ не будет при

$$b = \{2\} \cup [4; +\infty).$$

Уравнение не имеет решений $z \neq 0$ только при $b = 2$ (соответственно $a = 0$).

Ответ: 0; 2.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ длины всех ребер одинаковы. Точка M в пространстве такова, что $MA = MB = MC = \sqrt{3}$ см и прямая AM пересекается с высотой треугольника SBC , опущенной из вершины B . Найдите объем пирамиды $SABC$.

Решение:

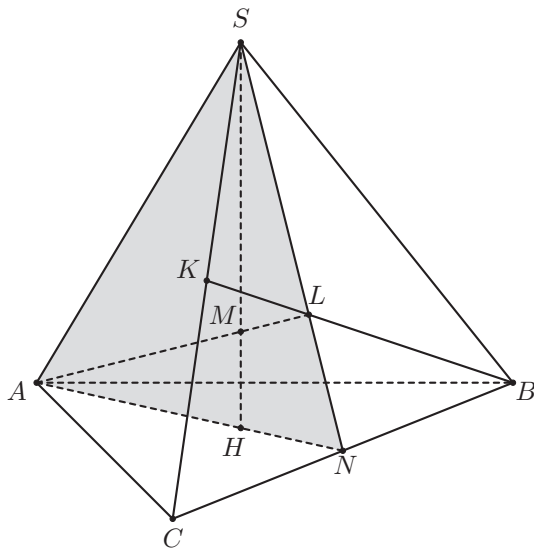


Рис. 19: к задаче №8

Равенство всех ребер означает, что пирамиды $SABC$ — это правильный тетраэдр. Так как $MA = MB = MC$, то высота из M на плоскость ABC падает в H — центр треугольника ABC . Аналогично высота из S тоже падает в H . Значит M лежит на прямой SH .

Раз AM лежит в плоскости ASH , то лежит и в плоскости ASN , где N — середина ребра BC . То есть AM пересекается с высотами SN и BK треугольника SBC . Значит, AM проходит через точку пересечения высот L — центр грани SBC и является высотой тетраэдра.

Перейдем к счету. Так как H — центр равностороннего треугольника ABC , то $AH : HN = 2 : 1$, L — центр равностороннего треугольника SBC , то $SL : LN = 2 : 1$. По теореме Менелая,

$$\frac{AM}{ML} = \frac{AH}{HN} \cdot \frac{NS}{SL} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{1}$$

Значит, $ML = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $AL = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Так как тетраэдр правильный, то

$$MH = ML = \frac{\sqrt{3}}{3}, SH = AL = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

По теореме Пифагора для треугольника AMH :

$$AH^2 = AM^2 - MH^2 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Снова учитывая $AH : HN = 2 : 1$, получим

$$AN = \frac{3}{2} \cdot AH = \sqrt{6}.$$

Из равностороннего треугольника ABC несложно найти сторону, зная его высоту:

$$BC = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot AN = 2\sqrt{2}.$$

Объем пирамиды:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot SH \cdot AN \cdot BC = \frac{1}{6} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.

2019 год

1 вариант

1. Найдите целое число, которое задается выражением:

$$(\sqrt{10} + \sqrt{7})^2 \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{7})^2.$$

Решение:

Вычислим

$$\begin{aligned} a &= (\sqrt{10} + \sqrt{7})^2 (\sqrt{10} - \sqrt{7})^2 = \left((\sqrt{10} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{7}) \right)^2 = \\ &= \left((\sqrt{10})^2 - (\sqrt{7})^2 \right)^2 = (10 - 7)^2 = 9. \end{aligned}$$

Ответ: 9.

2. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль, а из B в A в тот же момент по той же дороге выехал автобус. Они ехали без остановок с постоянными скоростями. На весь путь автомобиль затратил 2 часа, а автобус 3 часа. Через сколько минут после выезда они встретились?

Решение:

Обозначим через $v_{a/m}$ и $v_{a/б}$ скорости автомобиля и автобуса, соответственно. Из условия следует, что $AB = 2v_{a/m}$ и $BA = 3v_{a/б}$. Пусть t – время, прошедшее с момента выезда до встречи автомобиля и автобуса, а C – место их встречи. Тогда $AC = tv_{a/m}$, $BC = tv_{a/б}$. Отсюда

$$AB = AC + BC = t(v_{a/m} + v_{a/б}) = t \left(\frac{AB}{2} + \frac{AB}{3} \right) = \frac{5}{6}t \cdot AB.$$

Разделив обе части на AB , получим $\frac{5}{6}t = 1$, то есть $t = \frac{6}{5}$ часа = 72 минуты.

Ответ: Через 72 минуты.

3. Решите уравнение:

$$(x^2 + 8x - 5)^2 = (x + 1)(x + 7).$$

Решение:

Имеем: $(x + 1)(x + 7) = x^2 + 8x + 7$. Уравнение преобразуется к виду

$$(x^2 + 8x - 5)^2 = x^2 + 8x + 7.$$

Сделаем замену: $t = x^2 + 8x - 5$. Уравнение переписывается следующим образом: $t^2 = t + 12$, или, что то же, $t^2 - t - 12 = 0$. Решая его, находим корни: $t_1 = -3$, $t_2 = 4$. Осталось решить два квадратных уравнения: $x^2 + 8x - 5 = -3$ и $x^2 + 8x - 5 = 4$. Получаем четыре корня: $x_1 = -4 - 3\sqrt{2}$, $x_2 = -4 + 3\sqrt{2}$, $x_3 = -9$, $x_4 = 1$.

Ответ: Уравнение имеет четыре корня: $-4 \pm 3\sqrt{2}$; -9 ; 1 .

4. Решите уравнение:

$$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) + 8\cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = 6 - 3\sin x.$$

Решение:

Сначала применим формулы приведения:

$$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x,$$

$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(x - 2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x.$$

Уравнение перепишем в виде $\cos 2x + 8\sin x = 6 - 3\sin x$, или, после перенесения правой части влево, $\cos 2x + 11\sin x - 6 = 0$.

Воспользуемся формулой косинуса двойного угла: $1 - 2\sin^2 x + 11\sin x - 6 = 0$, или, после преобразований, $2\sin^2 x - 11\sin x + 5 = 0$.

Сделаем замену: $\sin x = t \in [-1; 1]$. Решая квадратное уравнение $2t^2 - 11t + 5 = 0$, получаем: $t = \frac{1}{2}$, 5 . Подходит только первый корень: $t = \frac{1}{2}$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$. Решая это простейшее тригонометрическое уравнение, получаем: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Трапеция площади 150 см^2 , в которой есть углы 90° и 150° , описана около окружности. Найдите радиус окружности.

Решение:

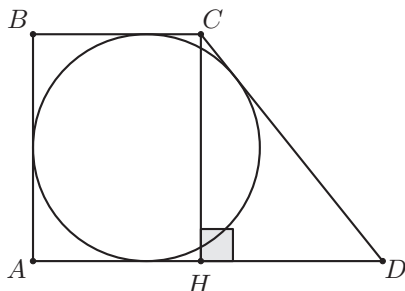


Рис. 20: к задаче №5

Пусть $ABCD$ – наша трапеция, в которой $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $\angle C = 150^\circ$, $\angle D = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

Обозначим через R радиус вписанной в неё окружности, а через H – основание высоты CH . Ясно, что $AB = CH = 2R$, $BC = AH$. Исходя из условия $\angle D = 30^\circ$, получаем: $CD = 2CH = 4R$. Так как $ABCD$ – описанная, то $AB + CD = BC + AD$.

Тогда площадь трапеции равна

$$S_{ABCD} = \frac{(AD + BC)}{2} \cdot AB = \frac{(AB + CD)}{2} \cdot AB = \frac{(2R + 4R)}{2} \cdot 2R = 6R^2.$$

По условию, $S_{ABCD} = 150 \text{ см}^2$, поэтому $6R^2 = 150 \text{ см}^2$, откуда $R = 5 \text{ см}$.

Ответ: 5 см.

6. Решите неравенство:

$$1 + \sqrt{15 - \log_x 3} \cdot \log_3(x^7) \geq \log_3(x^{25}).$$

Решение:

Используя свойства логарифмов, получим: $\log_3(x^7) = 7\log_3 x$, $\log_3(x^{25}) = 25\log_3 x$, $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$.

Сделаем замену: $\log_3 x = t$. Неравенство переписывается в виде

$$1 + \sqrt{15 - \frac{1}{t}} \cdot 7t \geq 25t, \quad \text{или} \quad t \left(\frac{1}{t} + 7\sqrt{15 - \frac{1}{t}} - 25 \right) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая.

1 случай: $t > 0$.

Разделив обе части неравенства на $t > 0$, имеем: $\frac{1}{t} + 7\sqrt{15 - \frac{1}{t}} - 25 \geq 0$.

Сделаем замену: $\sqrt{15 - \frac{1}{t}} = u \geq 0$. Неравенство перепишется в виде $7u - u^2 - 10 \geq 0$. Его решением является отрезок $[2; 5]$. То есть, $4 \leq 15 - \frac{1}{t} \leq 25$, или $-10 \leq \frac{1}{t} \leq 11$.

Принимая во внимание, что $t > 0$, находим: $t \geq \frac{1}{11}$.

2 случай: $t < 0$. Поделим обе части неравенства на $t < 0$:

$$\frac{1}{t} + 7\sqrt{15 - \frac{1}{t}} - 25 \leq 0.$$

Замена та же: $\sqrt{15 - \frac{1}{t}} = u \geq 0$. Неравенство примет вид: $7u - u^2 - 10 \leq 0$. Его решением будет множество $(-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$, а с учётом ограничения $u \geq 0$, $[0; 2] \cup [5; +\infty)$. Чтобы найти t , нужно решить следующие неравенства: $0 \leq 15 - \frac{1}{t} \leq 4$ и $25 \leq 15 - \frac{1}{t}$. Вспоминая, что у нас $t < 0$, первое не имеет решений. Решением второго будет промежуток $[-\frac{1}{10}; 0)$.

Разобрав два случая, находим: $\log_3 x \in [-\frac{1}{10}; 0) \cup [\frac{1}{11}; +\infty)$. Или: $x \in [3^{-\frac{1}{10}}; 1) \cup [3^{\frac{1}{11}}; +\infty)$.

Ответ: $x \in [3^{-\frac{1}{10}}; 1) \cup [3^{\frac{1}{11}}; +\infty)$.

7. Решите уравнение:

$$2^{\frac{7x+4}{x+3}} - 2^{\frac{8-3x}{x+3}} = 6.$$

Решение:

Пусть $2^{\frac{7x+4}{x+3}} = z$, $2^{\frac{8-3x}{x+3}} = t$. Тогда $z > 0$, $t > 0$, $z - t = 6$, $zt = 2^{\frac{7x+4+8-3x}{x+3}} = 2^{\frac{4x+12}{x+3}} = 2^4 = 16$. Отсюда $t^2 + 6t - 16 = 0$. Решая квадратное уравнение, имеем: $t_1 = -8$, $t_2 = 2$. Первый корень не подходит. Следовательно, $2^{\frac{8-3x}{x+3}} = 2 = 2^1$, откуда $\frac{8-3x}{x+3} = 1$, или $x = \frac{5}{4}$.

Ответ: $x = \frac{5}{4}$.

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота в 2 раза меньше, чем сторона основания. На боковых ребрах SA , SB , SC выбраны точки M , N , K соответственно так, что $SM : MA = 3 : 1$, $SN : NB = 3 : 13$, $SK : KC = 3 : 13$. Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки M , N , K , и плоскостью основания пирамиды.

Решение:

Пусть H – основание высоты SH . По условию, $SH = \frac{1}{2}AB$, $SM : MA = 3 : 1$, $SN : NB = 3 : 13$, $SK : KC = 3 : 13$. Обозначим через P , Q , R проекции точек M , N , K плоскость ABC , соответственно. Ясно, что они лежат на отрезках AH , BH , CH и $AP : PH = 1 : 3$, $BQ : QH = 13 : 3$, $CR : HR = 13 : 3$.

Если φ – угол между плоскостями MNK и ABC , то $S_{PQR} = S_{MKN} \cdot \cos \varphi$ (через S_{XYZ} мы обозначили площадь треугольника XYZ). Из подобий $\triangle AMP \sim \triangle ASH$, $\triangle CKR \sim \triangle CSH$, $\triangle BQN \sim \triangle BHS$, $\triangle CSB \sim \triangle KSN$ получаем: $AP = \frac{1}{4}AH$, $BQ = \frac{13}{16}BH$, $CR = \frac{13}{16}CH$, $RQ = KN = \frac{3}{16}BC$, $MP = \frac{1}{4}SH$, $KR = NQ = \frac{13}{16}SH$.

Пусть $SH = h$. Тогда $AB = BC = CA = 2h$, $AH = BH = CH = \frac{2h}{\sqrt{3}}$. Проведем необходимые вычисления:

$$PQ = PR = \sqrt{PH^2 + HR^2 - 2 \cdot PH \cdot HR \cdot \cos 120^\circ} =$$

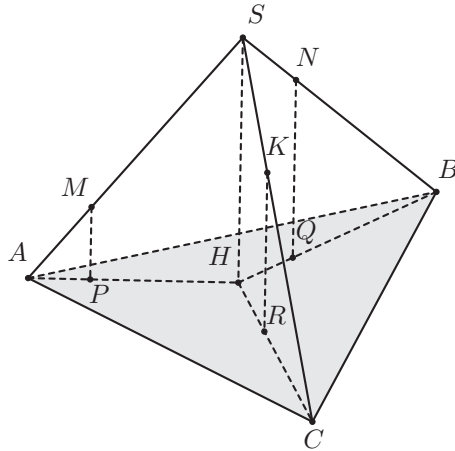


Рис. 21: к задаче №8

$$= \sqrt{\frac{9}{16} \cdot \frac{4h^2}{3} + \frac{9}{256} \cdot \frac{4h^2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{4h^2}{3}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}h,$$

 $RQ = KN = \frac{3}{8}h$. Имеем:

$$\cos \varphi = \frac{S_{PQR}}{S_{MNK}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot RQ \cdot h_1}{\frac{1}{2} \cdot KN \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Найдем

$$h_1 = \sqrt{PR^2 - \frac{1}{4}RQ^2} = \sqrt{\frac{63}{64}h^2 - \frac{9}{256}h^2} = \frac{9\sqrt{3}}{16}h$$

И

$$h_2 = \sqrt{MN^2 - \frac{1}{4}KN^2} = \sqrt{\frac{333}{256}h^2 - \frac{9}{256}h^2} = \frac{9}{8}h.$$

Отсюда $\cos \varphi = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{16}h}{\frac{8}{9}h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{6}$.

2020 год

1 вариант

1. Удовлетворяет ли число $\frac{3}{5}$ неравенству: $\sqrt{\frac{1}{3} - x^2} \geq 0$?

Решение:

Так как квадратный корень, если он определен, всегда неотрицателен, достаточно проверить неотрицательность подкоренного выражения (которая является необходимым и достаточным условием существования квадратного корня). При подстановке $x = \frac{3}{5}$ имеем:

$$\frac{1}{3} - x^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{9}{25} = \frac{25 - 27}{75} = \frac{-2}{75} < 0.$$

Ответ: Нет, не удовлетворяет.

2. Найдите наименьшее общее кратное чисел 45, 312 и 325.

Решение:

Воспользуемся следующими двумя утверждениями.

Теорема 1 (Основная теорема арифметики) : Любое натуральное число, большее единицы, единственным с точностью до перестановки множителей способом можно разложить в произведение простых (необязательно различных) чисел.¹

Теорема 2 (Формулы для НОД и НОК) : Пусть $a_1, \dots, a_n$ – натуральные числа; $p_1, \dots, p_k$ – все простые делители $a_1, \dots, a_n$; $a_1 = p_1^{\alpha_{11}} \dots p_k^{\alpha_{1k}}, \dots, a_n = p_1^{\alpha_{n1}} \dots p_k^{\alpha_{nk}}$ – канонические разложения, при необходимости дополненные степенями с нулевыми показателями. Тогда наибольший общий делитель чисел $a_1, \dots, a_n$ равен

$$(a_1, \dots, a_n) = p_1^{\min\{\alpha_{11}, \dots, \alpha_{n1}\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\min\{\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{nk}\}}$$

¹Такое произведение, в котором одинаковые простые собраны в степени, называется каноническим. Например, $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

и наименьшее общее кратное чисел $a_1, \dots, a_n$ равно

$$[a_1, \dots, a_n] = p_1^{\max\{\alpha_{11}, \dots, \alpha_{n1}\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\max\{\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{nk}\}}.$$

Разложим данные числа на простые множители: $45 = 3^2 \cdot 5^1$, $312 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 13^1$, $325 = 5^2 \cdot 13^1$. Дополним разложения степенями с нулевыми показателями, чтобы можно было применить теорему 2: $45 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 13^0$, $312 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 13^1$, $325 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 13^1$. Тогда

$$[45, 312, 325] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13^1 = 23400.$$

Ответ: 23400.

3. Решите уравнение:

$$(2x^2 - x + 5) \cdot |\sin x| = (x^2 + 5x - 3) \cdot \sin x.$$

Решение:

Рассмотрим три случая.

I. $\sin x = 0$.

Ясно, что любое число $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, является решением уравнения.

II. $\sin x > 0$.

Тогда $|\sin x| = \sin x$. Разделив обе части на $\sin x \neq 0$, имеем: $2x^2 - x + 5 = x^2 + 5x - 3$. Получаем уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$, корнями которого являются числа $x = 2$ и $x = 4$. Проведем проверку условия $\sin x > 0$. Видим, что $2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, следовательно, $\sin 2 > 0$. С другой стороны, $4 \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, откуда $\sin 4 < 0$. То есть подходит только $x = 2$.

III. $\sin x < 0$.

Тогда $|\sin x| = -\sin x$. Разделим обе части на $\sin x \neq 0$: $-2x^2 + x - 5 = x^2 + 5x - 3$. Уравнение преобразуется к виду: $3x^2 + 4x + 2 = 0$. Дискриминант $D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -8 < 0$. Следовательно, корней нет.

Ответ: $x = 2$ и $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Решите неравенство:

$$2 \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + \frac{\log_3(x^2 - x + 2)}{\log_9 4} \geq 1.$$

Решение:

Пользуясь свойствами логарифмов, проведем равносильные преобразования:

$$2 \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = 2 \log_{2^{-1}}(x-2) = \frac{2}{-1} \log_2(x-2) = -2 \log_2(x-2),$$

$$\begin{aligned} \frac{\log_3(x^2 - x + 2)}{\log_9 4} &= \frac{\log_3(x^2 - x + 2)}{\log_{3^2} 2^2} = \frac{\log_3(x^2 - x + 2)}{\frac{2}{2} \cdot \log_3 2} = \\ &= \frac{\log_3(x^2 - x + 2)}{\log_3 2} = \log_2(x^2 - x + 2). \end{aligned}$$

Следовательно, наше неравенство примет вид:

$$-2 \log_2(x-2) + \log_2(x^2 - x + 2) \geq 1.$$

Выпишем ОДЗ: $x-2 > 0$, $x^2 - x + 2 > 0$. То есть, $x > 2$.

Теперь перепишем неравенство:

$$\log_2(x^2 - x + 2) \geq 2 \log_2(x-2) + 1, \text{ или } \log_2(x^2 - x + 2) \geq \log_2(2(x-2)^2), \text{ или } \log_2(x^2 - x + 2) \geq \log_2(2x^2 - 8x + 8).$$

Иными словами, исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x + 2 \geq 2x^2 - 8x + 8 \\ x > 2 \end{cases}.$$

Первое неравенство переписывается в виде $x^2 - 7x + 6 \leq 0$, его решением будет промежуток $[1; 6]$. Решением второго будет промежуток $(2; +\infty)$. Их пересечение есть $(2; 6]$.

Ответ: $x \in (2; 6]$.

5. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$, $BC = 6$ и $AC = 7$ проведены биссектрисы AK , BL и CM . Найдите отношение площади треугольника BKM к площади треугольника CKL .

Решение:

По свойству биссектрисы:

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{BK}{CK} = \frac{BA}{CA}, \quad \frac{CL}{AL} = \frac{CB}{AB}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{S_{BKM}}{S_{CKL}} &= \frac{S_{BKM}}{S_{ABC}} : \frac{S_{CKL}}{S_{ABC}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot BK \cdot BM \cdot \sin \angle B}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot BA \cdot \sin \angle B} : \frac{\frac{1}{2} \cdot CK \cdot CL \cdot \sin \angle C}{\frac{1}{2} \cdot CB \cdot CA \cdot \sin \angle C} = \\ &= \frac{BK}{BC} \cdot \frac{BM}{BA} \cdot \frac{CB}{CK} \cdot \frac{CA}{CL} = \\ &= \frac{BK}{BK + CK} \cdot \frac{BM}{BM + AM} \cdot \frac{CK + BK}{CK} \cdot \frac{CL + AL}{CL} = \\ &= \frac{BA}{BA + CA} \cdot \frac{BC}{BC + AC} \cdot \frac{CA + BA}{CA} \cdot \frac{CB + AB}{CB} = \end{aligned}$$

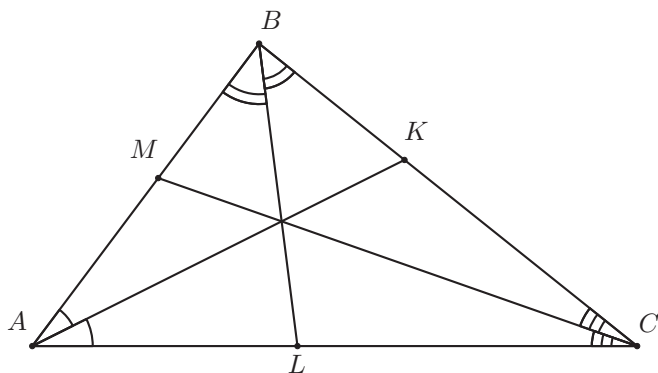


Рис. 22: к задаче №5

$$= \frac{4}{4+7} \cdot \frac{6}{6+7} \cdot \frac{7+4}{7} \cdot \frac{4+6}{6} = \frac{40}{91}.$$

Ответ: 40 : 91.

6. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$|2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x + a| \leq 5$$

выполняется для любых значений x .

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = 2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x$. Используем формулы для синуса и косинуса двойного угла: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$. Имеем:

$$f(x) = \cos 2x + 1 + 2 \sin 2x + 2 \cos 2x - 2 = 2 \sin 2x + 3 \cos 2x - 1.$$

Теперь применим метод введения дополнительного аргумента:

$$f(x) = \sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \sin 2x + \frac{3}{\sqrt{13}} \cos 2x \right) - 1 = \sqrt{13} \sin(2x + \varphi) - 1,$$

где $\varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Ясно, что множеством значений функции f будет промежуток $[-\sqrt{13} - 1; \sqrt{13} - 1]$. Неравенство $|f(x) + a| \leq 5$ равносильно двойному

$$-5 \leq f(x) + a \leq 5, \quad \text{или} \quad -5 - a \leq f(x) \leq 5 - a.$$

Чтобы оно выполнялось для любого вещественного x , необходимо и достаточно, чтобы $[-\sqrt{13} - 1; \sqrt{13} - 1] \subset [-5 - a; 5 - a]$, то есть чтобы

$$-5 - a \leq -\sqrt{13} - 1 \leq \sqrt{13} - 1 \leq 5 - a.$$

Решая по отдельности левое и правое неравенства, получим: $-4 + \sqrt{13} \leq a \leq 6 - \sqrt{13}$.

Ответ: $a \in [-4 + \sqrt{13}; 6 - \sqrt{13}]$.

2021 год

1 вариант

1. Пусть $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$. Вычислите $f\left(\frac{7}{2}\right)$.

Решение:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{7}{2}\right) &= \frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{7}{2} + 2}{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{7}{2} + 3} = \frac{\frac{49}{4} - \frac{21}{2} + 2}{\frac{49}{4} - 14 + 3} = \frac{\frac{49-42+8}{4}}{\frac{49-56+12}{4}} = \\ &= \frac{\frac{15}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{5} = 3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

2. Через первую трубу бассейн наполняется (от пустого до полного) за 10 часов, через вторую – за 15 часов. За сколько часов наполнится этот бассейн, если открыть одновременно обе трубы? (Скорости поступления воды через каждую трубу считать постоянными.)

Решение:

Обозначим производительности первой и второй труб (скорости заполнения бассейна трубами) p_1 и p_2 . Тогда $p_1 = \frac{1}{10}$, $p_2 = \frac{1}{15}$ (то есть, первая труба за один час заполняет $\frac{1}{10}$ часть бассейна, а вторая – $\frac{1}{15}$). Общая производительность обеих труб:

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, время заполнения бассейна двумя трубами

$$t = \frac{1}{p_1 + p_2} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6.$$

Ответ: 6 часов.

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4 \cos x + \cos 2y = -2 + 4 \sin^2 x \\ 2 \sin y - 2 \cos x = 1 \end{cases}.$$

Решение:

Выразим $\cos x$ из второго уравнения: $\cos x = \sin y - \frac{1}{2}$.

Преобразуем первое уравнение, воспользовавшись формулой косинуса двойного угла и основным тригонометрическим тождеством:

$$4 \cos x + 1 - 2 \sin^2 y = -2 + 4(1 - \cos^2 x),$$

или

$$4 \cos x - 2 \sin^2 y = 1 - 4 \cos^2 x.$$

Подставим $\cos x = \sin y - \frac{1}{2}$ в полученное уравнение:

$$4 \left(\sin y - \frac{1}{2} \right) - 2 \sin^2 y = 1 - 4 \left(\sin y - \frac{1}{2} \right)^2, \quad \text{или} \quad \sin^2 y = 1.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} 4 \cos x + \cos 2y = -2 + 4 \sin^2 x \\ 2 \sin y - 2 \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin y - \frac{1}{2} \\ \sin^2 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = \pm 1 \\ \cos x = \sin y - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sin y = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin y = -1 \\ \cos x = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ: $(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k), k, n \in \mathbb{Z}$.

4. Решите неравенство:

$$3 + \frac{1}{\log_{64}\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \log_{\frac{x}{2}}\left(34x - \frac{8}{x}\right).$$

Решение:

Преобразуем неравенство, воспользовавшись свойством логарифма $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$:

$$3 + \log_{\frac{x}{2}} 64 \leq \log_{\frac{x}{2}}\left(34x - \frac{8}{x}\right), \quad \text{или} \quad \log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{34x - \frac{8}{x}}{64}\right) \geq 3.$$

Далее,

$$\log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{17x}{32} - \frac{1}{8x}\right) \geq 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{17x}{32} - \frac{1}{8x}\right) \geq \log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} > 1 \\ \frac{17x}{32} - \frac{1}{8x} \geq \left(\frac{x}{2}\right)^3 \\ \left(\frac{x}{2}\right)^3 > 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{x}{2} < 1 \\ \frac{17x}{32} - \frac{1}{8x} \leq \left(\frac{x}{2}\right)^3 \\ \frac{17x}{32} - \frac{1}{8x} > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x > 2 \\ 17x - \frac{4}{x} \geq 4x^3 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 17x - \frac{4}{x} \leq 4x^3 \\ 17x - \frac{4}{x} > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x > 2 \\ 17x^2 - 4 \geq 4x^4 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x > 2 \\ \frac{1}{4} \leq x^2 \leq 4 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 < x < 2 \\ 17x^2 - 4 \leq 4x^4 \\ 17x^2 - 4 > 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 < x < 2 \\ \begin{cases} x^2 \leq \frac{1}{4} \\ x^2 \geq 4 \end{cases} \\ 17x^2 - 4 > 0 \end{cases} \right] \\
& \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 < x < 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ x > \frac{2}{\sqrt{17}} \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 < x < 2 \\ \frac{2}{\sqrt{17}} < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \right] \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{17}} < x \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{2}{\sqrt{17}}; \frac{1}{2} \right]$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD . Известно, что $AB = 6$, $AC = \sqrt{34}$, $AD = 4$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

Решение:

Так как AC биссектриса, то $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$. По свойству вписанных в окружность углов $BC = CD$.

Применим теорему косинусов к треугольникам ABC и ACD .

$$\begin{aligned}
BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \angle BAC \\
CD^2 &= AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AD \cdot AC \cos \angle CAD
\end{aligned}$$

Приравнивая правые части равенств получим

$$AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \angle BAC = AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AD \cdot AC \cos \angle CAD$$

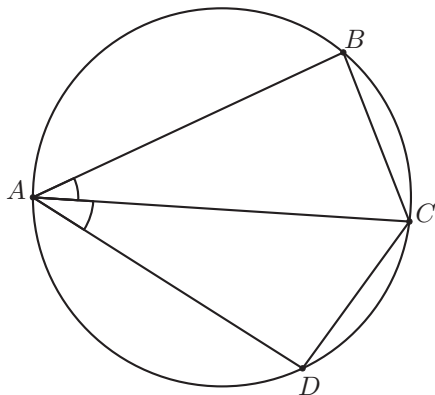


Рис. 23: к задаче №5

откуда следует

$$36 - 12\sqrt{34} \cos \alpha = 16 - 8\sqrt{34} \cos \alpha, \text{ или } \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

Следовательно, $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$.

Осталось вычислить площади

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{34} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = 9, \\ S_{ACD} &= \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin \angle DAC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{34} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = 6, \\ S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ACD} = 9 + 6 = 15. \end{aligned}$$

Ответ: 15.

6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$a^2 x^2 + \sqrt{x^2 - 5x + 4} = a(2\sqrt{7} - 4)x + 4\sqrt{7} - 11$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение:

Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} = -a^2 x^2 + a(2\sqrt{7} - 4)x + 4\sqrt{7} - 11.$$

Заметим, что в правой части уравнения можно выделить полный квадрат:

$$-a^2x^2 + a(2\sqrt{7} - 4)x + 4\sqrt{7} - 11 = -(ax - (\sqrt{7} - 2))^2.$$

Следовательно,

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} = -a^2x^2 + a(2\sqrt{7} - 4)x + 4\sqrt{7} - 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 4} = -(ax - (\sqrt{7} - 2))^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ -(ax - (\sqrt{7} - 2))^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x = 4 \\ x = 1 \\ a = \frac{\sqrt{7}-2}{x} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x = 4 \\ a = \frac{\sqrt{7}-2}{4} \\ x = 1 \\ a = \sqrt{7} - 2 \end{cases} \end{bmatrix}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}-2}{4}; \sqrt{7} - 2$.

2022 год

1 вариант

1. Какое из чисел больше:

$$3,8 \cdot 3,7 + 29 \quad \text{или} \quad \frac{238}{17} + \sqrt{841}?$$

Решение:

Проведем вычисления: $3,8 \cdot 3,7 + 29 = 14,06 + 29 = 43,06$. С другой стороны, $\frac{238}{17} + \sqrt{841} = 14 + \sqrt{841} = 14 + 29 = 43$.

Следовательно, $3,8 \cdot 3,7 + 29 > \frac{238}{17} + \sqrt{841}$.

Ответ: Первое число больше.

2. Решите уравнение:

$$5x(x-8) = 3(|x-4| - 4).$$

Решение:

Рассмотрим случай когда $x-4 \geq 0$. Тогда $|x-4| = x-4$ и получим систему

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 5x(x-8) = 3((x-4)-4) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ (5x-3)(x-8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{3}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 8. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $x-4 < 0$. Тогда $|x-4| = -(x-4)$ и получим систему

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-4 < 0 \\ 5x(x-8) = 3(-(x-4)-4) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ 5x^2 - 37x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{37}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0; 8.

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5^{\frac{x-y}{2}} + 5^x \cdot 5^{-y} = 30, \\ 5^{x+y} + 5 = 30 \cdot 5^y. \end{cases}$$

Решение:

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$5^{\frac{x-y}{2}} + 5^x \cdot 5^{-y} = 30 \Leftrightarrow 5^{\frac{x-y}{2}} + 5^{x-y} = 30 \Leftrightarrow 5^{\frac{x-y}{2}} + \left(5^{\frac{x-y}{2}}\right)^2 = 30.$$

Выполним замену $t = 5^{\frac{x-y}{2}}$ и получим уравнение

$$\begin{aligned} t^2 + t - 30 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -6 \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{\frac{x-y}{2}} = -6 \\ 5^{\frac{x-y}{2}} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5^{\frac{x-y}{2}} = 5 \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5^{\frac{x-y}{2}} + 5^x \cdot 5^{-y} = 30 \\ 5^{x+y} + 5 = 30 \cdot 5^y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 1 \\ 5^{x+y} + 5 = 30 \cdot 5^y \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 5^{2y+2} + 5 = 30 \cdot 5^y. \end{cases} \end{aligned}$$

Решим отдельно второе уравнение системы:

$$5^{2y+2} + 5 = 30 \cdot 5^y \Leftrightarrow 25(5^y)^2 - 30 \cdot 5^y + 5 = 0 \Leftrightarrow 5(5^y)^2 - 6 \cdot 5^y + 1 = 0.$$

Выполним замену $u = 5^y$ и получим уравнение

$$5u^2 - 6u + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^y = 1 \\ 5^y = 5^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Следовательно, возвращаясь к последней системе, получим:

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ 5^{2y+2} + 5 = 30 \cdot 5^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}.$$

Ответ: $(2; 0), (1; -1)$.

4. Решите уравнение:

$$\sin^2 7x \cdot \left(\sin 7x \cdot \cos x - \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} \right) = \frac{\sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin x \cdot \cos 7x}{1 + \operatorname{ctg}^2 7x}.$$

Решение:

Область допустимых значений данного уравнения: $\sin 7x \neq 0 \Leftrightarrow 7x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Преобразуем уравнение, применяя формулу $1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$:

$$\begin{aligned} \sin^2 7x \cdot \left(\sin 7x \cdot \cos x - \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} \right) &= \\ = \sin^2 7x \cdot \left(\sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin x \cdot \cos 7x \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что, согласно ОДЗ, $\sin 7x \neq 0$, поделим обе части уравнения на $\sin^2 7x$ и иначе сгруппируем слагаемые:

$$\sin 7x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 7x = \sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2}.$$

Применяя формулы $\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha \pm \beta)$, получим:

$$\sin 6x = \sin 2x,$$

или (разлагая разность синусов)

$$\sin 2x \cdot \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin 7x \neq 0 \\ \begin{bmatrix} \sin 2x = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{bmatrix} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 7x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \begin{bmatrix} 2x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z} \\ \begin{bmatrix} x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4}, m \in \mathbb{Z} \end{bmatrix} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4}, m \in \mathbb{Z}.$

5. Длины оснований трапеции относятся как 1 : 3, а длины боковых сторон как 3 : 4. В эту трапецию вписана окружность. Найдите отношение площади круга, ограниченного данной окружностью, к площади трапеции.

Решение:

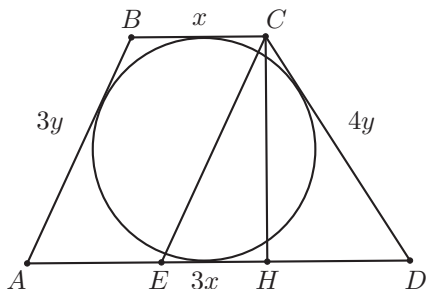


Рис. 24: к задаче №5

Пусть $BC = x$, $AD = 3x$, $AB = 3y$, $CD = 4y$. Так как в трапецию вписана окружность, то

$$AB + CD = BC + AD \Rightarrow 3y + 4y = x + 3x \Rightarrow y = \frac{4}{7}x.$$

Следовательно, $BC = x$, $AD = 3x$, $AB = \frac{12}{7}x$, $CD = \frac{16}{7}x$.

Проведем через вершину C прямую, параллельную AB . Пусть E – точка пересечения данной прямой с AD . Тогда $ABCE$ – параллелограмм.

Рассмотрим треугольник CED : $CD = \frac{16}{7}x$, $CE = AB = \frac{12}{7}x$, $ED = AD - AE = 3x - x = 2x$. Полупериметр $p = \frac{CD+CE+ED}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{7}x + \frac{12}{7}x + 2x \right) = 3x$.

По формуле Герона:

$$S_{CED} = \sqrt{3x(3x - 2x) \left(3x - \frac{16}{7}x \right) \left(3x - \frac{12}{7}x \right)} = \frac{3\sqrt{15}}{7}x^2.$$

Пусть CH – высота треугольника CED (высота трапеции). Тогда

$$CH = \frac{2S_{CED}}{ED} = \frac{\frac{6\sqrt{15}}{7}x^2}{2x} = \frac{3\sqrt{15}}{7}x.$$

CH совпадает с диаметром вписанной окружности. Следовательно, радиус окружности

$$r = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{7}x = \frac{3\sqrt{15}}{14}x.$$

Таким образом,

$$\frac{S_{\text{круга}}}{S_{ABCD}} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}(BC + AD)CH} = \frac{\pi \left(\frac{3\sqrt{15}}{14}x\right)^2}{\frac{1}{2} \cdot 4x \cdot \frac{3\sqrt{15}}{7}x} = \frac{3\sqrt{15}}{56}\pi.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{15}}{56}\pi$.

6. Решите неравенство:

$$2\log_{x-3}(x^2-16x+64)+2\log_{8-x}(-x^2+11x-24)+\log_{8-x}(x^2-6x+9) > 10.$$

Решение:

Сначала разложим все квадратные трехчлены, входящие в неравенство: $x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$, $-x^2 + 11x - 24 = -(x - 3)(x - 8)$, $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Используя эти разложения и свойства логарифма преобразуем неравенство:

$$4\log_{x-3}|x-8|+2\log_{8-x}|x-3|+2\log_{8-x}|x-8|+2\log_{8-x}|x-3| > 10.$$

Отметим, что, согласно ОДЗ, выполняются неравенства: $x - 3 > 0$, $8 - x > 0$. Учитывая это, раскроем модули:

$$4\log_{x-3}(8-x)+2\log_{8-x}(x-3)+2\log_{8-x}(8-x)+2\log_{8-x}(x-3) > 10,$$

откуда получим

$$\log_{x-3}(8-x) + \log_{8-x}(x-3) - 2 > 0.$$

Сделаем замену: $t = \log_{x-3}(8-x)$. Тогда $\log_{8-x}(x-3) = \frac{1}{\log_{x-3}(8-x)} = \frac{1}{t}$.

Получаем неравенство:

$$t + \frac{1}{t} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t} > 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t \neq 1 \end{cases}.$$

Возвращаясь к старой переменной x :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \log_{x-3}(8-x) > 0 \\ \log_{x-3}(8-x) \neq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-3 > 1 \\ 8-x > 1 \\ 0 < x-3 < 1 \\ 0 < 8-x < 1 \end{cases} \\ \log_{x-3}(8-x) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 4 \\ x < 7 \\ 3 < x < 4 \\ 7 < x < 8 \end{cases} \\ x-3 \neq 8-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 4 \\ x < 7 \\ x \neq \frac{11}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 < x < 7 \\ x \neq \frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 < x < \frac{11}{2} \\ \frac{11}{2} < x < 7 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Ответ: $(4; \frac{11}{2}) \cup (\frac{11}{2}; 7)$.

7. Все вершины треугольной пирамиды $ABCD$ лежат на одной сфере. Известно, что $AB = AC = 8$, $BC = 8\sqrt{3}$ и $AD = BD = CD = 17$. Найдите радиус сферы.

Решение:

Пусть DH – высота пирамиды. Прямоугольные треугольники DHA , DHB , DHC равны, поскольку их гипотенузы равны и DH – общий катет. Следовательно, $AH = BH = CH$, т.е. H – центр описанной около треугольника ABC окружности.

Пусть R – радиус сферы и O – центр сферы. Опустим из точки O перпендикуляр на плоскость треугольника ABC . Пусть H_1 –

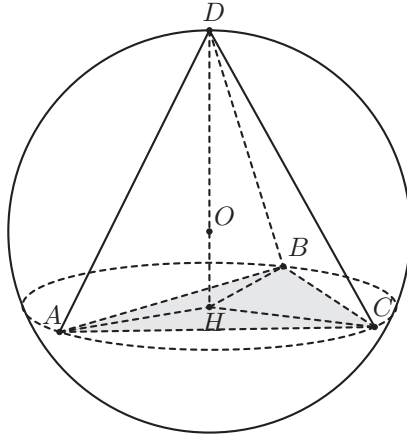


Рис. 25: к задаче №7

основание данного перпендикуляра. Прямоугольные треугольники OH_1A , OH_1B , OH_1C равны, поскольку их гипотенузы равны $OA = OB = OC = R$ и OH_1 – общий катет. Следовательно, $AH_1 = BH_1 = CH_1$, т.е. H_1 – центр описанной около треугольника ABC окружности. Значит, $H = H_1$ и точки D, O, H лежат на одной прямой.

В треугольнике ABC полупериметр $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(8 + 8 + 8\sqrt{3}) = 8 + 4\sqrt{3}$. По формуле Герона, $S_{ABC} = \sqrt{(8 + 4\sqrt{3}) \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot (8 - 4\sqrt{3})} = 16\sqrt{3}$. Радиус описанной около ABC окружности $CH = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8\sqrt{3}}{4 \cdot 16\sqrt{3}} = 8$.

В треугольнике DHC : $DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{289 - 64} = 15$.

В треугольнике OHC : $CH = 8$, $OC = R$, $OH = |DH - OD| = |15 - R|$. Следовательно,

$$64 + (15 - R)^2 = R^2 \Leftrightarrow 289 - 30R = 0 \Leftrightarrow R = \frac{289}{30}.$$

Ответ: $\frac{289}{30}$.

8. Найдите все значения a , при каждом из которых у неравенств

$$x^2 - 4 \leq 4a(x - 2) \quad \text{и} \quad x^2 + a^2 < a(2x + 1)$$

нет ни одного общего решения.

Решение:

Рассмотрим первое неравенство

$$x^2 - 4 \leq 4a(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 4ax + 8a - 4 \leq 0.$$

Пусть $f(x) = x^2 - 4ax + 8a - 4$. Дискриминант

$$D = (-4a)^2 - 4(8a - 4) = 16a^2 - 32a + 16 = 16(a^2 - 2a + 1) = 16(a - 1)^2.$$

Корни уравнения $f(x) = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{4a \pm \sqrt{16(a-1)^2}}{2} = \frac{4a \pm 4|a-1|}{2} = 2, 4a - 2.$$

Множеством решений неравенства $f(x) \leq 0$ является отрезок $[x_1, x_2]$, где $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4a - 2 \end{cases}$ при $a > 1$, $\begin{cases} x_1 = 4a - 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ при $a < 1$, при $a = 1$ отрезок $[x_1, x_2]$ вырождается в точку $\{2\}$.

Рассмотрим неравенство

$$x^2 + a^2 < a(2x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 - a < 0.$$

Пусть $g(x) = x^2 - 2ax + a^2 - a$, $D_g = 4a^2 - 4(a^2 - a) = 4a$ — дискриминант $g(x)$, $x_{\text{в}} = -\frac{-2a}{2} = a$ — абсцисса вершины параболы (графика $g(x)$).

Тогда неравенство $g(x) < 0$ не имеет решения на отрезке $[x_1, x_2]$ тогда и только тогда, когда

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x_1) \geq 0 \\ g(x_2) \geq 0 \\ D_g \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_g > 0 \\ x_{\text{в}} \notin [x_1, x_2] \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(2) \geq 0 \\ g(4a - 2) \geq 0 \\ a \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a > 0 \\ f(x_{\text{в}}) > 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - 5a + 4 \geq 0 \\ 9a^2 - 13a + 4 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a \leq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ f(a) > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a-1)(a-4) \geq 0 \\ 9\left(a - \frac{4}{9}\right)(a-1) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a \leq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ -3a^2 + 8a - 4 > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a \leq 1 \\ a \geq 4 \\ a \leq \frac{4}{9} \\ a \geq 1 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} a \leq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ 3(a-2)\left(a - \frac{2}{3}\right) < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a \leq \frac{4}{9} \\ a = 1 \\ a \geq 4 \\ a \leq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ \frac{2}{3} < a < 2 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a \leq \frac{4}{9} \\ a = 1 \\ a \geq 4 \\ a \leq 0 \\ \frac{2}{3} < a < 2 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \leq 0 \\ a = 1 \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{1\}$.

2023 год

1 вариант

1. Вычислите:

$$\frac{12,5^3 + 1,2^3}{13,7} - (12,5^2 + 1,2^2).$$

Решение:

Применяя формулу для суммы кубов, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{12,5^3 + 1,2^3}{13,7} - (12,5^2 + 1,2^2) = \\ &= \frac{(12,5 + 1,2)(12,5^2 - 12,5 \cdot 1,2 + 1,2^2)}{13,7} - (12,5^2 + 1,2^2) = \\ &= 12,5^2 - 12,5 \cdot 1,2 + 1,2^2 - 12,5^2 - 1,2^2 = -12,5 \cdot 1,2 = -15. \end{aligned}$$

Ответ: -15 .

2. Докажите, что число

$$K = \frac{3}{\sqrt{10} + 1} + \frac{1}{\sqrt{10} - 2} - \frac{\sqrt{10}}{2}$$

целое, и найдите его.

Решение:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{\sqrt{10} + 1} + \frac{1}{\sqrt{10} - 2} - \frac{\sqrt{10}}{2} = \\ &= \frac{3(\sqrt{10} - 1)}{(\sqrt{10} + 1)(\sqrt{10} - 1)} + \frac{\sqrt{10} + 2}{(\sqrt{10} - 2)(\sqrt{10} + 2)} - \frac{\sqrt{10}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{10} - 1}{3} + \frac{\sqrt{10} + 2}{6} - \frac{\sqrt{10}}{2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2(\sqrt{10} - 1) + \sqrt{10} + 2 - 3\sqrt{10}}{6} = \frac{0}{6} = 0.$$

Ответ: 0.

3. Найдите числовое значение выражение $S = a^3b^2 + a^2b^3$, где a и b – корни квадратного уравнения

$$4x^2 - 19x + 16 = 0.$$

Решение:

По теореме Виета: $a + b = -\frac{-19}{4} = \frac{19}{4}$, $ab = \frac{16}{4} = 4$.

Поэтому

$$S = a^3b^2 + a^2b^3 = (ab)^2(a + b) = 4^2 \cdot \frac{19}{4} = 4 \cdot 19 = 76.$$

Ответ: 76.

4. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg} \pi x^2 \cdot \operatorname{tg} \left(2\pi x + \frac{\pi}{3} \right) = 1,$$

удовлетворяющие условию $|x| \leq 1$.

Решение:

Найдем сначала все решения уравнения. Поделим обе части уравнения на $\operatorname{tg} \left(2\pi x + \frac{\pi}{3} \right)$, учитывая, что $\operatorname{tg} \left(2\pi x + \frac{\pi}{3} \right) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \pi x^2 \cdot \operatorname{tg} \left(2\pi x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \pi x^2 = \operatorname{ctg} \left(2\pi x + \frac{\pi}{3} \right) \\ 2\pi x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \pi x^2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi x - \frac{\pi}{3} \right) \\ 2\pi x \neq \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \pi x^2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi x \right) \\ x \neq \frac{1}{12} + \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x^2 = \frac{\pi}{6} - 2\pi x + \pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{6} - 2\pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi t, & t \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{1}{12} + \frac{k}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - \left(\frac{1}{6} + n\right) = 0, & n \in \mathbb{Z} \\ x \neq -\frac{1}{6} - \frac{t}{2}, & t \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{1}{12} + \frac{k}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 + 2x - \left(\frac{1}{6} + n\right) = 0$. Дискриминант уравнения $D = 4 + 4\left(\frac{1}{6} + n\right) = 4\left(\frac{7}{6} + n\right)$. Значит уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда $D \geq 0 \Leftrightarrow n \geq -\frac{7}{6}$.

Корни уравнения: $x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{n + \frac{7}{6}}}{2} = -1 \pm \sqrt{n + \frac{7}{6}}$.

Возвращаясь к системе получим

$$\begin{cases} x^2 + 2x - \left(\frac{1}{6} + n\right) = 0, & n \in \mathbb{Z} \\ x \neq -\frac{1}{6} - \frac{t}{2}, & t \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{1}{12} + \frac{k}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{n + \frac{7}{6}}, & n \in \mathbb{Z}, n \geq -1 \\ x \neq -\frac{1}{6} - \frac{t}{2}, & t \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{1}{12} + \frac{k}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{n + \frac{7}{6}}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq -1.$$

(Поскольку $\sqrt{\frac{6n+7}{6}}$ всегда будет иррациональным числом.)

Отберем теперь среди найденных решений те, которые удовлетворяют неравенству $|x| \leq 1$.

Ясно, что решения $x = -1 - \sqrt{n + \frac{7}{6}} < -1$ при всех допустимых целых значениях n . Поэтому эти решения не удовлетворяют неравенству $|x| \leq 1$.

Осталось выяснить при каких n решения $x = -1 + \sqrt{n + \frac{7}{6}}$ удовлетворяют неравенству $|x| \leq 1$:

$$|x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| -1 + \sqrt{n + \frac{7}{6}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -1 + \sqrt{n + \frac{7}{6}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{n + \frac{7}{6}} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq n + \frac{7}{6} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq n + \frac{7}{6} \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{7}{6} \leq n \leq \frac{17}{6} \Leftrightarrow n = -1, 0, 1, 2.$$

Ответ: $-1 + \sqrt{n + \frac{7}{6}}$, $n = -1, 0, 1, 2$.

5. Решите неравенство

$$(4 - 2^{4x-x^2-2}) \cdot \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \geq 0.$$

Решение:

$$\begin{aligned} (4 - 2^{4x-x^2-2}) \cdot \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \geq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 4 - 2^{4x-x^2-2} \geq 0 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4 - 2^{4x-x^2-2} \leq 0 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 4x - x^2 - 2 \leq 2 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \geq 0 \\ 4x - x^2 - 2 \geq 2 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \leq 0 \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \geq 0 \\ (x-2)^2 \leq 0 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \geq 0 \\ x = 2 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \leq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \geq \log_{x^2} 1 \\ x = 2 \end{array} \right] \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2 > 1 \\ 3 - \sqrt{2+x^2} \geq 1 \\ 0 < x^2 < 1 \\ 0 < 3 - \sqrt{2+x^2} \leq 1 \end{array} \right\} \\ x = 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2 > 1 \\ \sqrt{2+x^2} \leq 2 \\ 0 < x^2 < 1 \\ 2 \leq \sqrt{2+x^2} < 3 \end{array} \right\} \\ x = 2 \end{array} \right] \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2 > 1 \\ 2 + x^2 \leq 4 \\ 0 < x^2 < 1 \\ 4 \leq 2 + x^2 < 9 \end{array} \right\} \\ x = 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x^2 \leq 2 \\ x = 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} \leq x < -1 \\ 1 < x \leq \sqrt{2} \\ x = 2 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Ответ: $[-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}] \cup \{2\}$.

6. Произведение первых четырех членов убывающей неотрицательной геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равно 1. Сумма квадратов этих членов равна $85/8$. Найдите: $b_1 \cdot b_2 + b_3 \cdot b_4$.

Решение:

Пусть q – знаменатель прогрессии. Из условия следует, что $0 < q < 1$ и

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{array}{l} b_1 b_2 b_3 b_4 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = \frac{85}{8} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_1(b_1 q)(b_1 q^2)(b_1 q^3) = 1 \\ b_1^2 + (b_1 q)^2 + (b_1 q^2)^2 + (b_1 q^3)^2 = \frac{85}{8} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_1^4 q^6 = 1 \\ b_1^2 q^3 \left(\frac{1}{q^3} + \frac{1}{q} + q + q^3 \right) = \frac{85}{8} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $q > 0$, имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1^2 q^3 = 1 \\ \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q} + q + q^3 = \frac{85}{8} \end{array} \right.$$

Преобразуем левую часть второго уравнения, используя формулы сокращенного умножения

$$\begin{aligned}\frac{1}{q^3} + \frac{1}{q} + q + q^3 &= \left(\frac{1}{q} + q\right) + \left(\frac{1}{q^3} + q^3\right) = \\ &= \left(\frac{1}{q} + q\right) + \left(\frac{1}{q} + q\right) \left(\frac{1}{q^2} - 1 + q^2\right) = \\ &= \left(\frac{1}{q} + q\right) + \left(\frac{1}{q} + q\right) \left(\left(\frac{1}{q} + q\right)^2 - 3\right).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{q^3} + \frac{1}{q} + q + q^3 = \frac{85}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{q} + q\right) + \left(\frac{1}{q} + q\right) \left(\left(\frac{1}{q} + q\right)^2 - 3\right) = \frac{85}{8}.$$

Произведем замену $x = \frac{1}{q} + q$ и получим уравнение:

$$x + x(x^2 - 3) = \frac{85}{8} \Leftrightarrow x^3 - 2x = \frac{85}{8} \Leftrightarrow 8x^3 - 16x - 85 = 0.$$

Выполним еще одну замену $t = 2x$ и получим уравнение:

$$t^3 - 8t - 85 = 0.$$

По теореме о целых корнях приведенного многочлена с целыми коэффициентами целые корни данного уравнения являются делителями свободного коэффициента. Переберем делители свободного коэффициента -85 : $\pm 1, \pm 5, \pm 17, \pm 85$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $t = 5$ является корнем уравнения.

Значит, многочлен $t^3 - 8t - 85$ делится на $t - 5$. Поделив $t^3 - 8t - 85$ на $t - 5$, получим: $t^3 - 8t - 85 = (t - 5)(t^2 + 5t + 17)$. Квадратный трехчлен $t^2 + 5t + 17$ не имеет корней, так как его дискриминант $D = 25 - 68 < 0$.

Следовательно,

$$t^3 - 8t - 85 = 0 \Leftrightarrow (t - 5)(t^2 + 5t + 17) = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{q} + q = \frac{5}{2}.$$

Вычислим теперь искомое выражение:

$$\begin{aligned} b_1 \cdot b_2 + b_3 \cdot b_4 &= b_1 \cdot b_1 q + b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 = b_1^2 q^3 \left(\frac{1}{q^2} + q^2 \right) = \\ &= b_1^2 q^3 \left(\left(\frac{1}{q} + q \right)^2 - 2 \right) = \frac{25}{4} - 2 = \frac{17}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{17}{4}$.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) основание $AC = 10\sqrt{6}$. На стороне BC выбрана точка Q так, что $BQ : QC = 3 : 7$ и $S_{AQC} = 140$. На стороне AB выбрана точка P так, что $S_{PBQ} = 30$. Найдите длину отрезка PQ .

Решение:

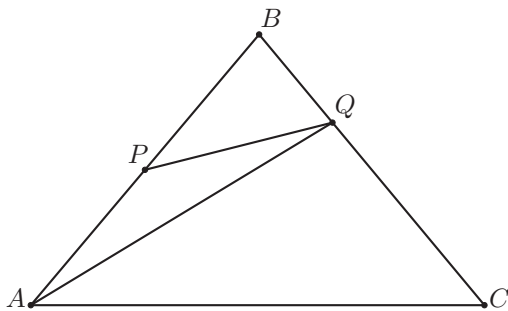


Рис. 26: к задаче №7

1) Рассмотрим отношение площадей:

$$\frac{S_{ABQ}}{S_{AQC}} = \frac{BQ}{QC} = \frac{3}{7} \Rightarrow S_{ABQ} = \frac{3}{7} S_{AQC} = \frac{3}{7} \cdot 140 = 60.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = S_{ABQ} + S_{AQC} = 60 + 140 = 200.$$

2) Пусть $AB = x$. Тогда полупериметр треугольника ABC

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(2x + 10\sqrt{6}) = x + 5\sqrt{6}.$$

По формуле Герона получим

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)} = 200$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x + 5\sqrt{6}) \cdot 5\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{6} \cdot (x - 5\sqrt{6})} = 200$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{x^2 - 150} = 200 \Rightarrow 6(x^2 - 150) = 1600$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1250}{3} \Rightarrow AB = BC = x = \frac{25\sqrt{6}}{3}.$$

3) По теореме косинусов в треугольнике ABC :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{1250}{3} - 2 \cdot \frac{1250}{3} \cdot \cos \angle B = 600$$

$$\Rightarrow \frac{2500}{3} \cdot \cos \angle B = \frac{700}{3} \Rightarrow \cos \angle B = \frac{7}{25}.$$

4) Рассмотрим отношение

$$\frac{PB}{AB} = \frac{S_{PBQ}}{S_{ABQ}} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \Rightarrow PB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{25\sqrt{6}}{3} = \frac{25\sqrt{6}}{6}.$$

Поскольку $BQ : QC = 3 : 7$, то

$$\frac{BQ}{BC} = \frac{3}{10} \Rightarrow BQ = \frac{3}{10}BC = \frac{3}{10} \cdot \frac{25\sqrt{6}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

5) По теореме косинусов в треугольнике PBQ

$$\begin{aligned} PQ^2 &= PB^2 + BQ^2 - 2 \cdot PB \cdot BQ \cdot \cos \angle B = \\ &= \left(\frac{25\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{25\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot \cos \angle B = \frac{425}{3} - 125 \cdot \cos \angle B = \\ &= \frac{425}{3} - 35 = \frac{320}{3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$PQ = \sqrt{\frac{320}{3}} = \frac{8\sqrt{15}}{3}.$$

Ответ: $\frac{8\sqrt{15}}{3}$.

8. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6\sqrt{2}$. Высота призмы $BB_1 = 6\sqrt{2}$. В каком отношении общий перпендикуляр двух скрещивающихся диагоналей BA_1 и CB_1 делит диагональ BA_1 ?

Решение:

1) Спроектируем диагонали BA_1 и CB_1 на плоскость $ABC_1 D_1$. Диагональ CB_1 перпендикулярна плоскости $ABC_1 D_1$, так как CB_1 и BC_1 перпендикулярны как диагонали квадрата $BB_1 C_1 C$, и сторона AB перпендикулярна плоскости $BB_1 C_1 C$. Поэтому проекция диагонали CB_1 на плоскость $ABC_1 D_1$ есть точка N – точка пересечения диагоналей CB_1 и BC_1 (середина каждой из диагоналей). По тем же соображениям проекция точки A_1 на плоскость $ABC_1 D_1$ есть точка M – середина AD_1 . Поэтому проекция BA_1 на плоскость $ABC_1 D_1$ – отрезок BM .

2) Рассмотрим прямоугольник $ABC_1 D_1$. $BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{72 + 72} = 12$. Следовательно, $BN = \frac{BC_1}{2} = 6$.

Опустим перпендикуляр NH из точки N на отрезок BM . Можно заметить, что построенный перпендикуляр делит отрезок BM в

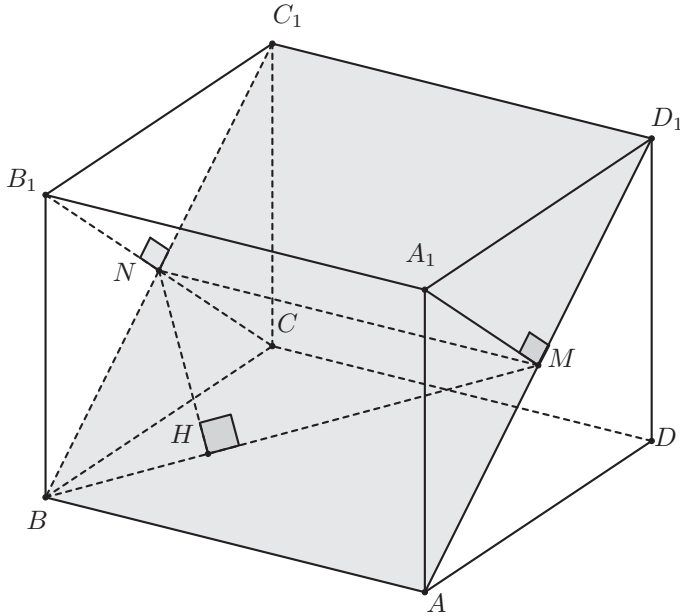


Рис. 27: к задаче №8

таким же отношении, как и общий перпендикуляр двух диагоналей BA_1 и CB_1 делит диагональ BA_1 .

3) Рассмотрим прямоугольный треугольник BNM . $BM = \sqrt{BN^2 + MN^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$. Высота $NH = \frac{BN \cdot MN}{BM} = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5}$.

В треугольнике NHM катет $HM = \sqrt{MN^2 - NH^2} = \sqrt{64 - \frac{576}{25}} = \frac{32}{5}$. Значит, $BH = BM - HM = 10 - \frac{32}{5} = \frac{18}{5}$.

Следовательно, $BH : HM = \frac{\frac{18}{5}}{\frac{32}{5}} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$.

Ответ: 16 : 9.

2024 год**1 вариант**

1. Какое из чисел больше: $A = 12 \cdot (7 + 1) \cdot (7^2 + 1) \cdot (7^4 + 1)$ или $B = 2 \cdot 7^8 - 1$?

Решение:

Заметим, что

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot (7 - 1) \cdot (7 + 1) \cdot (7^2 + 1) \cdot (7^4 + 1) = \\ &= 2 \cdot (7^2 - 1) \cdot (7^2 + 1) \cdot (7^4 + 1) = \\ &= 2 \cdot (7^4 - 1) \cdot (7^4 + 1) = 2 \cdot (7^8 - 1) = 2 \cdot 7^8 - 2 = B - 1 < B. \end{aligned}$$

Ответ: $A < B$ (число B больше).

2. Собственная скорость теплохода в 4 раза больше скорости течения реки, причем на путь длиной 10 километров по течению он тратит на 20 минут больше, чем на путь длиной 3 километра против течения реки. Найдите собственную скорость теплохода. Ответ дайте в километрах в час.

Решение:

Пусть v_t – собственная скорость теплохода в км/ч, v_p – скорость течения реки в км/ч. Тогда $v_t + v_p$ – скорость теплохода по течению реки, $v_t - v_p$ – скорость теплохода против течения реки. На путь длиной 10 км по течению теплоход потратит время $t_1 = \frac{10}{v_t + v_p}$ (в часах), а на путь длиной 3 км против течения – время $t_2 = \frac{3}{v_t - v_p}$. Из условия следует, что $\frac{10}{v_t + v_p} = \frac{3}{v_t - v_p} + \frac{1}{3}$. Преобразуем уравнение, имея в виду, что, согласно другому условию, $v_t = 4v_p$:

$$\frac{10}{5v_p} = \frac{3}{3v_p} + \frac{1}{3}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{v_p} = \frac{1}{3},$$

то есть $v_p = 3$. Следовательно, $v_t = 4v_p = 12$.

Ответ: 12 км/ч.

3. Для числа $\sqrt{3} + \sqrt{23}$ найдите ближайшее к нему натуральное число. Ответ обоснуйте.

Решение:

Пусть $x = \sqrt{3} + \sqrt{23}$. Тогда $x > 0$ и

$$x^2 = 3 + 23 + 2\sqrt{69} = 26 + 2\sqrt{69} = 26 + \sqrt{276}.$$

Далее, $6^2 + 6 + \frac{1}{4} < 26 + \sqrt{276} = x^2 < 26 + 17 < 49$, так как $(16\frac{1}{4})^2 = 16^2 + 8 + \frac{1}{16} < 276$. Поэтому $6,5 < x < 7$. Следовательно, ближайшее к x натуральное число есть 7.

Ответ: 7.

4. Решите неравенство

$$9^{x^2+1} - 30 \cdot 15^{x^2} + 225 \cdot 25^{x^2-1} > 0.$$

Решение:

Сделаем замену $x^2 = t \geq 0$: $9 \cdot 9^t - 30 \cdot 15^t + 9 \cdot 25^t > 0$. Это однородное показательное неравенство второй степени. Разделим обе части на $9 \cdot 9^t$: $1 - \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^t + \left(\left(\frac{5}{3}\right)^t\right)^2 > 0$. Сделаем еще одну замену: $\left(\frac{5}{3}\right)^t = y \geq 1$. Решим квадратное неравенство: $y^2 - \frac{10}{3}y + 1 > 0$. Его решением является объединение промежутков: $y \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (3; +\infty)$. С учетом ограничения $y \geq 1$, имеем: $y > 3$, то есть $\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2} > 3$, или $x^2 > \log_{\frac{5}{3}} 3$, что означает, что $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\log_{\frac{5}{3}} 3}\right) \cup \left(\sqrt{\log_{\frac{5}{3}} 3}; +\infty\right)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\log_{\frac{5}{3}} 3}\right) \cup \left(\sqrt{\log_{\frac{5}{3}} 3}; +\infty\right)$.

5. В треугольнике ABC проведены высоты AH_1 и BH_2 . Известно, что $H_1H_2 = \sqrt{3}$, $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Решение:

Сделаем чертеж (так как треугольник тупоугольный, указанные высоты будут лежать вне треугольника).

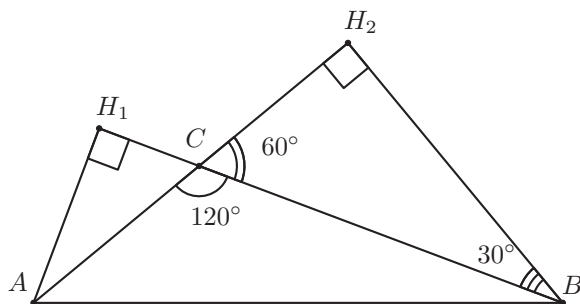


Рис. 28: к задаче №5

Поскольку $\angle AH_1B = \angle AH_2B = 90^\circ$, точки H_1 и H_2 лежат на окружности, построенной на AB как на диаметре. Далее, по теореме синусов,

$$H_1H_2 = AB \cdot \sin \angle CBH_2 = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}AB =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2R \sin 120^\circ = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

где R – радиус описанной около ABC окружности (так как $\angle CBH_2 = 90^\circ - \angle BCH_2 = 90^\circ - (180^\circ - \angle ACB) = 30^\circ$). Отсюда $R = \frac{H_1H_2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$.

Ответ: 2.

6. Решите уравнение

$$\sqrt{4 \cos \left(\frac{2025\pi}{2} + x \right) - 4 \cos^2 x + 5} = \frac{3}{2} - \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Решение:

Используем одну из формул приведения: $\cos\left(\frac{2025\pi}{2} + x\right) = \cos\left(1012\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} & \sqrt{4 \cos\left(\frac{2025\pi}{2} + x\right) - 4 \cos^2 x + 5} = \sqrt{-4 \sin x - 4 \cos^2 x + 5} = \\ & = \sqrt{-4 \sin x - 4(1 - \sin^2 x) + 5} = \sqrt{4 \sin^2 x - 4 \sin x + 1} = \\ & = \sqrt{(2 \sin x - 1)^2} = |2 \sin x - 1|. \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x &= \frac{3}{2} - \sin x - \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 x) = \\ &= \sin^2 x - \sin x + 1. \end{aligned}$$

Сделаем замену: $t = \sin x \in [-1; 1]$. Уравнение примет вид: $|2t - 1| = t^2 - t + 1$. Чтобы раскрыть модуль, рассмотрим два случая:

1) $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Уравнение переписется в виде $2t - 1 = t^2 - t + 1$, или $t^2 - 3t + 2 = 0$, или $t \in \{1, 2\}$. С учетом ограничений, $t = 1$.

2) $-1 \leq t < \frac{1}{2}$. Уравнение переписется в виде $1 - 2t = t^2 - t + 1$, или $t^2 + t = 0$, или $t \in \{-1, 0\}$. С учетом ограничений, $t = -1, 0$.

Возвращаясь к x , получаем три семейства решений: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $x = \pi q$, $q \in \mathbb{Z}$. Первые два семейства объединяются в семейство $x = \frac{\pi}{2} + \pi p$, $p \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi p$, $p \in \mathbb{Z}$; $x = \pi q$, $q \in \mathbb{Z}$.

7. Найдите все положительные решения уравнения

$$3^{x^4-6} \cdot 9^{\frac{9\sqrt{3}}{x}-6} \cdot 27^{\frac{9}{x^2}-6} = 2\sqrt{3}x - x^2 - 2.$$

Решение:

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} 3^{x^4-6} \cdot 9^{\frac{9\sqrt{3}}{x}-6} \cdot 27^{\frac{9}{x^2}-6} &= 3^{x^4-6+2\left(\frac{9\sqrt{3}}{x}-6\right)+3\left(\frac{9}{x^2}-6\right)} = \\ &= 3^{x^4-6+\frac{18\sqrt{3}}{x}-12+\frac{27}{x^2}-18} = 3^{x^4+\frac{18\sqrt{3}}{x}+\frac{27}{x^2}-36}. \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть: $2\sqrt{3}x - x^2 - 2 = 1 - (x - \sqrt{3})^2$.

Далее, оценим правую часть:

$$2\sqrt{3}x - x^2 - 2 = 1 - (x - \sqrt{3})^2 \leq 1.$$

И оценим левую часть, используя неравенство Коши о средних ($\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a \geq 0, b \geq 0$):

$$3^{x^4+\frac{18\sqrt{3}}{x}+\frac{27}{x^2}-36} \geq 3^0 = 1,$$

так как

$$\begin{aligned} x^4 + \frac{18\sqrt{3}}{x} + \frac{27}{x^2} - 36 &= \left(x^4 + \frac{27}{x^2}\right) + \frac{18\sqrt{3}}{x} - 36 \geq \\ &\geq 2\sqrt{x^4 \cdot \frac{27}{x^2}} + \frac{18\sqrt{3}}{x} - 36 = 6\sqrt{3}x + \frac{18\sqrt{3}}{x} - 36 = \\ &= 6\sqrt{3}\left(x + \frac{3}{x}\right) - 36 \geq 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} - 36 = 0 \quad (\text{т.к. } x > 0). \end{aligned}$$

Следовательно, левая и правая части могут совпадать тогда, и только тогда, когда они обе равны 1.

Правая часть $2\sqrt{3}x - x^2 - 2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$. Непосредственная проверка показывает, что $x = \sqrt{3}$ является корнем уравнения.

Ответ: $\sqrt{3}$.

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC ребро AS длиннее ребра BC в два раза. На ребре SC выбрана точка D так, что плоскость ABD делит объем пирамиды

в отношении 3 к 1. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и плоскостью ABD .

Решение:

Сделаем чертеж. Опустим из S и C перпендикуляры SK и CH на плоскость ABD .

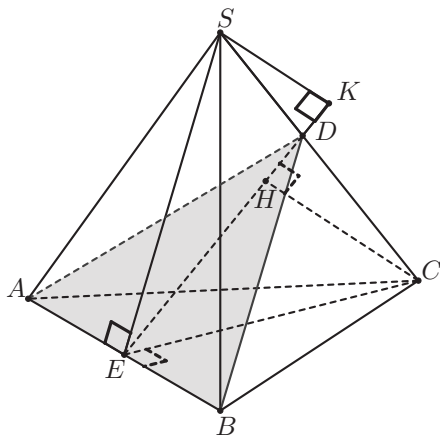


Рис. 29: к задаче №8

Ясно, что

$$\frac{V_{SABD}}{V_{CABD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{ABD} \cdot SK}{\frac{1}{3} \cdot S_{ABD} \cdot CH} = \frac{SK}{CH}.$$

(Здесь через V_X обозначен объем тела X , а через S_Y – площадь фигуры Y).

Следовательно, $\frac{SK}{CH} = 3$ или $\frac{SK}{CH} = \frac{1}{3}$. Далее, $SK \parallel CH$, поэтому точки S, D, C, H, K лежат в одной плоскости, а точки K, D, H – на одной прямой. Отсюда $\triangle CDH \sim \triangle SDK$. Поэтому $\frac{SD}{CD} = 3$ или $\frac{SD}{CD} = \frac{1}{3}$. Заметим, что плоскость, содержащая точки S, D, C, H, K проходит и через середину (точка E) стороны AB (с помощью теоремы о трех перпендикулярах можно показать, что точка E

принадлежит прямой, содержащей точки K, D, H). Следовательно, $\angle CED$ и есть искомый угол между плоскостью основания пирамиды и плоскостью ABD .

Пусть $AB = BC = AC = a$, тогда $SA = SB = SC = 2a$.

В прямоугольном треугольнике SEB :

$$SE = \sqrt{SB^2 - BE^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{15}a}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике CEB :

$$CE = \sqrt{CB^2 - BE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

По теореме косинусов $SE^2 = SC^2 + CE^2 - 2 \cdot SC \cdot CE \cdot \cos \angle SCE$, откуда

$$\cos \angle SCE = \frac{SC^2 + CE^2 - SE^2}{2 \cdot SC \cdot CE} = \frac{4a^2 + \frac{3a^2}{4} - \frac{15a^2}{4}}{2 \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $\sin \angle SCE = \sqrt{1 - \cos^2 \angle SCE} = \sqrt{1 - \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{11}{12}}$.

Рассмотрим случай, когда $\frac{SD}{CD} = 3$. Тогда $CD = \frac{1}{4}SC = \frac{a}{2}$. По теореме косинусов

$$\begin{aligned} ED^2 &= CE^2 + CD^2 - 2 \cdot CE \cdot CD \cdot \cos \angle ECD = \\ &= \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{3a^2}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно, $ED = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. По теореме синусов $\frac{\sin \angle CED}{CD} = \frac{\sin \angle ECD}{ED}$, или $\sin \angle CED = \frac{CD \cdot \sin \angle ECD}{ED} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{11}{3}}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$. Откуда $\angle CED = \arcsin \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Рассмотрим случай когда $\frac{SD}{CD} = \frac{1}{3}$. Тогда $CD = \frac{3}{4}SC = \frac{3a}{2}$. По теореме косинусов

$$ED^2 = CE^2 + CD^2 - 2 \cdot CE \cdot CD \cdot \cos \angle ECD =$$

$$= \frac{3a^2}{4} + \frac{9a^2}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{9a^2}{4}.$$

Следовательно, $ED = \frac{3a}{2} = CD$. Отсюда, $\angle CED = \angle ECD = \arcsin \sqrt{\frac{11}{12}}$.

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{11}}{6}$ или $\arcsin \sqrt{\frac{11}{12}}$.

ОТВЕТЫ

2011 год

1 вариант

- 1) $\frac{3}{4}$; $\sqrt{7} + 2$. 2) 5, 7. 3) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. 4) $(\frac{3}{2}; 1)$.
 5) -186 . 6) $10; 9 - \sqrt{33}; 14; 15 + \sqrt{33}$ или
 $10; 15 - \sqrt{33}; 14; 9 + \sqrt{33}$. 7) $(-3; +\infty)$. 8) $\frac{1}{3}$.

2 вариант

- 1) $-\frac{2}{3}$; $\sqrt{5} + 3$. 2) 6, 2. 3) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
 4) $(1; \frac{2}{3})$. 5) -175 . 6) $13; \frac{25 - \sqrt{145}}{2}; 17; \frac{35 + \sqrt{145}}{2}$ или
 $13; \frac{25 + \sqrt{145}}{2}; 17; \frac{35 - \sqrt{145}}{2}$. 7) $(6; +\infty)$. 8) $\frac{3}{8}$.

2012 год

1 вариант

- 1) Все три числа являются целыми: 4, 66, 2. 2) -1 ; 1.
 3) $\frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; 0$. 4) 45046. 5) $(0; 1) \cup [7; 2401]$. 6) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$.
 7) $\left[1 - \frac{2\sqrt{11}}{11}; 1 + \frac{2\sqrt{11}}{11}\right]$. 8) $27 : 5$.

2 вариант

- 1) Все три числа являются целыми: 5, 70, 2. 2) -2 ; 2.
 3) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; 0$. 4) 50197. 5) $(0; 1) \cup [11; 1331]$. 6) $\frac{73\sqrt{3}}{2}$.
 7) $\left[\frac{11 - 2\sqrt{11}}{7}; \frac{11 + 2\sqrt{11}}{7}\right]$. 8) $18 : 7$.

2013 год

1 вариант

- 1) 12. 2) $(-3\frac{4}{5}; -\frac{1}{5})$. 3) $\pm \frac{2\pi}{27} + \frac{4\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}$. 4) 675.
 5) $(\log_2 12; \log_2 13) \cup [4; +\infty)$. 6) 10. 7) $(116; 6); (6; 116)$. 8) $2; \frac{1}{2}$.

2 вариант

- 1) 4. 2) $(-5\frac{1}{5}; -\frac{4}{5})$. 3) $\pm \frac{4\pi}{33} + \frac{4\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z}$. 4) 598.
 5) $(\log_3 6; \log_3 7) \cup [2; +\infty)$. 6) 6. 7) $(5; 95); (95; 5)$. 8) $3; \frac{1}{3}$.

2014 год**1 вариант**

- 1) 13. 2) -4 . 3) $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$. 4) $\frac{5}{8}$.
 5) $[-\frac{8}{9}; 0) \cup (0; 1) \cup [2; \frac{10+2\sqrt{145}}{15}) \cup (\frac{10+2\sqrt{145}}{15}; 2\frac{2}{3}]$. 6) $44\sqrt{3}$.
 7) $(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty)$. 8) 10 см.

2 вариант

- 1) 15. 2) -3 . 3) $\pm \frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$. 4) $\frac{511}{198}$.
 5) $[-7\frac{1}{2}; \frac{-13-\sqrt{409}}{8}) \cup (\frac{-13-\sqrt{409}}{8}; -3] \cup (-1; 0) \cup (0; \frac{5}{6}]$. 6) $24\sqrt{3}$.
 7) $(\frac{4-2\sqrt{3}}{3}; +\infty)$. 8) 12 см.

2015 год**1 вариант**

- 1) 4,5. 2) 2; 6. 3) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 4) $(0; 0); (\frac{1}{2}; 4); (\frac{5}{6}; -6\frac{2}{3})$.
 5) $[6; 14)$. 6) $5\sqrt{3}$. 7) $-2\frac{3}{13}; -1\frac{4}{7}$. 8) $27\sqrt{3}$.

2 вариант

- 1) $\sqrt{\frac{20}{7}} + \frac{23}{6}$. 2) 3; 4. 3) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 4) $(0; 0), (1; 2\frac{1}{2}); (1\frac{1}{2}, -3\frac{3}{4})$. 5) $(-10; -2]$. 6) $6\sqrt{3}$. 7) $-2\frac{4}{7}; -3\frac{3}{13}$. 8) $12\sqrt{3}$.

2016 год**1 вариант**

- 1) 1 корень. 2) $(7; 2); (-2; -7)$. 3) 25. 4) $(0; 1) \cup [5; +\infty)$.
 5) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{1}{2} \arctg 3 + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. 6) $\frac{5\sqrt{15}}{4}$. 7) $-34; -2$.
 8) $8\sqrt{7}$.

2 вариант

- 1) 1 корень. 2) $(7; 1); (-1; -7)$. 3) 20. 4) $(0; 1) \cup [3; +\infty)$.
 5) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{1}{2} \arctg 2 + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. 6) $\frac{\sqrt{143}}{4}$. 7) $-32; -2$.
 8) $6\sqrt{3}$.

2017 год

1 вариант

- 1) 16; 17. 2) 5; 9. 3) $\frac{511}{45}$. 4) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$
 $\frac{\pi}{12} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$. 5) $(9; \frac{1}{3}), \left(\frac{9+\sqrt{105}}{4}; \frac{9+\sqrt{105}}{4}\right)$. 6) (25; 16) и (16; 25).
 7) $(-1; 2)$. 8) $\frac{1}{4}$.

2 вариант

- 1) 14; 15. 2) 6; 9. 3) $\frac{1023}{85}$. 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$
 $-\frac{11\pi}{12} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$. 5) $(9; \frac{1}{3}), \left(\frac{\sqrt{46+4}}{5}; \frac{\sqrt{46-4}}{6}\right)$. 6) (9; 16) и (16; 9).
 7) $(-2; 1)$. 8) $\frac{3}{4}$.

2018 год

1 вариант

- 1) 2. 2) 3. 3) $(0; 3) \cup [4, 5; +\infty)$. 4) 4092.
 5) $(\arctg 2 + \pi + 2\pi n; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k), n, k \in \mathbb{Z}$. 6) 4 : 15. 7) 0; 2.
 8) $\frac{8}{3}$.

2 вариант

- 1) 5. 2) 2. 3) $(0; 2) \cup [\frac{18}{7}; +\infty)$. 4) 8184.
 5) $(\arctg 3 + \pi + 2\pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k), n, k \in \mathbb{Z}$. 6) 49 : 125. 7) 0; 1.
 8) $8\sqrt{3}$.

2019 год

1 вариант

- 1) 9. 2) Через 72 минуты. 3) $-4 \pm 3\sqrt{2}; -9; 1$. 4) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$. 5) 5 см. 6) $\left[3^{-\frac{1}{10}}; 1\right) \cup \left[3^{\frac{1}{11}}; +\infty\right)$. 7) $\frac{5}{4}$. 8) $\frac{\pi}{6}$.

2 вариант

- 1) 25. 2) 48 минут. 3) $-1; -6; -\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. 4) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
 5) 6 см. 6) $\left[2^{-\frac{1}{8}}; 1\right) \cup \left[2^{\frac{1}{17}}; +\infty\right)$. 7) $\frac{2}{3}$. 8) $\arccos \frac{1}{\sqrt{53}}$.

2020 год

1 вариант

- 1) Нет, не удовлетворяет. 2) 23400. 3) $2; \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 4) $(2; 6]$.
 5) $40 : 91$. 6) $[-4 + \sqrt{13}; 6 - \sqrt{13}]$.

2 вариант

- 1) $\frac{2}{15}$. 2) $-1; 0; 1; 2$. 3) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. 4) $\left(0; \frac{1}{3\sqrt{3}}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; 27\right]$. 5) $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ; \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ см}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ см}, 2 \text{ см}$. 6) $a = 6, b = 2$.

2021 год

1 вариант

- 1) 3. 2) 6 часов. 3) $(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k), k, n \in \mathbb{Z}$. 4) $\left(\frac{2}{\sqrt{17}}; \frac{1}{2}\right]$.
 5) 15. 6) $\frac{\sqrt{7}-2}{4}; \sqrt{7} - 2$.

2 вариант

- 1) 9702. 2) 3069. 3) $\pm \frac{1}{12} \arccos \frac{1}{4} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z}$. 4) $(\frac{1}{5}; 1), (125; 5)$.
 5) $\sqrt{19}$. 6) 2.

3 вариант

- 1) $\frac{215}{64}$. 2) 240 км. 3) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}; \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{11} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
 4) $(\log_5 9; 1), (0; \log_2 18)$. 5) $12\sqrt{3}$. 6) $-1; 2$.

2022 год

1 вариант

- 1) Первое число больше. 2) 0; 8. 3) $(2; 0), (1; -1)$. 4) $\frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}; \frac{2\pi}{8} + \frac{\pi m}{4}, m \in \mathbb{Z}$. 5) $\frac{3\sqrt{15}}{56}\pi$. 6) $(4; \frac{11}{2}) \cup (\frac{11}{2}; 7)$. 7) $\frac{289}{30}$.
 8) $(-\infty; 0] \cup \{1\}$.

2 вариант

- 1) Первое число больше. 2) 0; 6. 3) $(2; 0), (0; -2)$. 4) $\frac{\pi}{3} + \pi l, l \in \mathbb{Z}; \frac{2\pi}{3} + \pi t, t \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. 5) $\frac{8\sqrt{11}}{135}\pi$. 6) $(3; \frac{9}{2}) \cup (\frac{9}{2}; 6)$.
 7) $\frac{169}{24}$. 8) $\{-1\} \cup [0; +\infty)$.

2023 год

1 вариант

- 1) -15 . 2) 0 . 3) 76 . 4) $-1 + \sqrt{n + \frac{7}{6}}$, $n = -1, 0, 1, 2$.
5) $[-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}] \cup \{2\}$. 6) $\frac{17}{4}$. 7) $\frac{8\sqrt{15}}{3}$. 8) $16 : 9$.

2 вариант

- 1) 15 . 2) 1 . 3) $18, 05$. 4) $1 - \sqrt{\frac{4}{3} + k}$, $k = -1, 0, 1, 2$.
5) $[-\sqrt{3}; -1) \cup (1; \sqrt{3}] \cup \{2\}$. 6) $-\frac{15}{4}$. 7) $\frac{3\sqrt{13}}{2}$. 8) $144 : 25$.

2024 год

1 вариант

- 1) Число B больше. 2) 12 км/ч. 3) 7 . 4) $\left(-\infty; -\sqrt{\log_{\frac{5}{3}} 3}\right) \cup$
 $\left(\sqrt{\log_{\frac{5}{3}} 3}; +\infty\right)$. 5) 2 . 6) $\frac{\pi}{2} + \pi p$, $p \in \mathbb{Z}$; πq , $q \in \mathbb{Z}$. 7) $\sqrt{3}$.
8) $\arcsin \frac{\sqrt{11}}{6}$; $\arcsin \sqrt{\frac{11}{12}}$.

2 вариант

- 1) Число C больше. 2) 20 км/ч. 3) 7 . 4) $\left(-\infty; -\sqrt{\log_{\frac{3}{2}} 2}\right) \cup$
 $\left(\sqrt{\log_{\frac{3}{2}} 2}; +\infty\right)$. 5) $3\sqrt{3}$. 6) $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 7) $\sqrt{2}$.
8) $\arcsin \frac{2\sqrt{1023}}{93}$ или $\arcsin \frac{4\sqrt{2211}}{201}$.

3 вариант

- 1) 51 . 2) 2401 . 3) 2 . 4) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$. 5) $\frac{5\pi}{2}$. 6) $\frac{3}{2}$. 7) $18\sqrt{2}$.
8) $[-21; -12)$.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Казахстанский филиал

Вступительное испытание по математике
Пособие для поступающих
в Казахстанский филиал МГУ

Подписано в печать 30.05.2025. Формат 60х90/16
Усл.печ.л.10,25. Бумага офсетная.
Тираж 300 экз. Заказ № 16
Отпечатано в типографии «Раритет»
г. Астана, пр. Женис, 67. оф. 2