Республиканская студенческая предметная олимпиада по специальности «Математическое и компьютерное моделирование»
Нур–Султан, 19.04.19
Разбор решений

1. (Баев А.Ж.) Пусть $n > 1$. Приведите пример четырёх квадратных вырожденных матриц A, B, C, D порядка n таких, что блочная матрица порядка $2n$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

невырождена.

Решение:

$$A = D = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = C = \begin{pmatrix} O_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (Абдикалыков А.К.) Найдите

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(k - \sin\frac{k}{n}\right)^{2018}}{n^{2019}}.$$

Решение:

Обозначим выражение, предел которого надо найти, как S_n. Эту сумму можно переписать как

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k - \sin\frac{k}{n}}{n}\right)^{2018} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k),$$

где $f(x) = x^{2018}$, а $\xi_k \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Видно, что это некоторая интегральная сумма функции $f(x)$ при равномерном разбиении отрезка $[0, 1]$; значит, её предел при $n \to \infty$ равен интегралу

$$\int\limits_0^1 x^{2018}\, dx = \frac{1}{2019}.$$

3. (Баев А.Ж.) Даны N различных точек на координатной прямой и чёрный ящик, который позволяет узнать координаты центра тяжести любых $K \leqslant N$ точек. За какое минимальное количество запросов можно определить координаты всех точек?

Решение:

Пусть x_1, x_2, …, x_n — искомые координаты. После i-го запроса мы получаем равенство:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = f_i,$$

где a_{ij} равно либо $\frac{1}{K}$, либо 0, причём ненулевых коэффициентов ровно K. Таким образом, задача сводится к решению системы линейных уравнений

$$\frac{1}{K}Ax = f$$

с матрицей специального вида. Покажем, что при любом $K < N$ существует невырожденная квадратная матрица порядка N такая, чтобы в каждой строке было ровно K единиц и $N - K$ нулей.

Чтобы узнать координаты первых $(K+1)$-й точки, решим систему $\frac{1}{K}B\overline{x} = f_{1..k+1}$ с матрицей порядка $K+1$ вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Система уравнения с данной матрицей всегда совместна: сложим все строки — получим строку из всех единиц, вычтем из полученной строки остальные строки — получим строку из одной единицы. Запросами, соответствующими данной матрице, можно получить координаты первых $(K+1)$-й точки. Далее будем делать запросы, в каждом из которых будут первые $(K-1)$ точка и какая-то новая точка.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, при $K < N$, ответ — N. А при $K = N$, очевидно, найти x_i невозможно ни за какое количество запросов.

4. (Абдикалыков А.К., Баев А.Ж.) Найдите все многочлены $P(x)$ с неотрицательными коэффициентами, для которых верно

$$3\int\limits_{-1}^{1} P(x)\,dx = P(-1) + 4P(0) + P(1).$$

Решение:

Представим искомый многочлен в виде суммы $P(x) = Q(x) + R(x)$, где $Q(x)$ — многочлен с нечётными показателями при x, $R(x)$ — с чётными. При таких обозначениях условие задачи равносильно

$$3\int\limits_0^1 R(x)\,dx = 2R(0) + R(1),$$

а нечётная составляющая $Q(x)$ может быть таким образом произвольной. Пусть $R(x) = a_{2k}x^{2k} + \ldots + a_2x^2 + a_0$, тогда наше равенство эквивалентно

$$\frac{3}{5}a_4 + \frac{3}{7}a_6 + \ldots + \frac{3}{2k+1}a_{2k} = a_4 + a_6 + \ldots + a_{2k},$$

что невозможно, если хотя бы один из коэффициентов a_4, a_6, …, a_{2k} больше нуля. Поэтому ответом на задачу являются все многочлены вида $xT(x^2) + ax^2 + b$.

5. (Абдикалыков А.К.) Существует ли такая функция `int f(int x)`, что присваивание `y = f(f(x))` при всех `x` даёт тот же результат, что и `y = g(x)`, где `g(x)` описана следующим образом?

а)
```
int g(int x)
{
    return x + 2019;
}
```

б)
```
int g(int x)
{
    if (x % 2 == 0)
        return x + 1;
    else
        return x - 1;
}
```

Примечание: Все арифметические действия производятся по правилам знаковой арифметики с модулем 2^{32}. Например, если $x = 2147483647$, то $x + 1$ принимает значение -2147483648.

Решение:

а) Допустим, что нашлась такая функция $f(x)$, что $f(f(x)) = g(x)$. Тогда $f(x)$ обратима, поскольку $f(f(x - 2019)) = x$, причём обратная функция однозначно определена. Таким образом, f осуществляет биективное отображение множества целых чисел $\{-2^{31}, -2^{31} + 1, \ldots, 2^{31} - 1\}$ на само себя; другими словами, f — некоторая перестановка чисел типа `int`. То же самое можно сказать и про g: указанное множество данная функция преобразует в $\{-2^{31}+2019, -2^{31}+2020, \ldots, 2^{31}-1, -2^{31}, -2^{31}+1, \ldots, -2^{31}+2018\}$. Нетрудно видеть, что g — нечётная перестановка (количество инверсий $2019\cdot(2^{32}-2019)$), но это приводит к противоречию, так как $g = f\circ f$ — композиция двух чётных или двух нечётных перестановок и должна быть чётной. Следовательно, функции f, удовлетворяющей условиям, не существует.

б) Подойдёт функция

```
int f(int x)
{
    int t = (x % 4 + 4) % 4;
    if (t == 0 || t == 1)
        return x + 2;
    if (t == 2)
        return x - 1;
    if (t == 3)
        return x - 3;
}
```

6. (Абдикалыков А.К.) Дана бесконечная лента из белых и чёрных клеток. Робот начинает своё движение с некоторой клетки и движется вправо на одну клетку, если текущая клетка белая, и влево, если чёрная. Найдите математическое ожидание количества различных клеток, которые посетит этот робот.

Решение:

Допустим, что начальная клетка белая. Тогда робот будет двигаться вправо, пока не встретит чёрную клетку, после чего он зациклится. Выпишем возможные варианты: `WB`, вероятность $1/4$, посещены 2 клетки; `WWB`, вероятность $1/8$, посещены 3 клетки; `WWWB`, вероятность $1/16$, посещены 4 клетки; и так далее. Проведя аналогичные рассуждения для начальной чёрной клетки, получим те же числа. Искомое математическое ожидание будет равно

$$2\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots\right)=\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}+\ldots=M.$$

Сумму M можно найти несколькими способами, в том числе и так:

$$M+1=M+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)=\frac{3}{2}+\frac{4}{4}+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{n+1}{2^{n-1}}+\ldots=2M-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M=3.$$