

Открытая олимпиада по математике

10 декабря 2016

*Время работы: 180 минут**Каждая задача оценивается в 10 баллов.*

1. Докажите, что для любого натурального n верно равенство:

$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = 0.$$

2. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что $P(1) = 2$, $P(2) = 1$ и $P(x)$ принимает иррациональные значения для всех рациональных x , кроме 1 и 2?

3. Для положительных чисел a_i известно, что $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Докажите, что функция

$$f(x) = (1 + a_1^x)(1 + a_2^x) \dots (1 + a_n^x)$$

неубывающая при $x > 0$.

4. Дан тетраэдр, грани которого имеют одинаковую площадь. Докажите, что все его грани равны.

5. Для набора вещественных чисел c_0, c_1, \dots, c_n известно, что

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \dots + \frac{c_n}{n+1} = 0.$$

Докажите, что уравнение $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = 0$ имеет хотя бы один вещественный корень.

6. A — ассоциативное кольцо с единицей (не гарантируется, что умножение коммутативно). D — множество всех необратимых элементов A . Известно, что $a^2 = 0$ для всех элементов $a \in D$. Докажите, что $axa = 0$ для всех $a \in D$, $x \in A$.

7. Дана матрица A размером $n \times n$, где элементы матрицы a_{ij} равны последней цифре числа $(i + j - 2)$.

(а) Вычислите определитель матрицы при $n \leq 8$;

(б) Вычислите определитель матрицы при $n \geq 11$;

(с) Докажите, что определитель матрицы делится на 10^7 при $n = 9$ и $n = 10$.

8. Обозначим частичную сумму гармонического ряда через

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Найти сумму следующего ряда:

$$\frac{H_1}{10} + \frac{H_2}{100} + \frac{H_3}{1000} + \dots$$