

Республиканская студенческая предметная олимпиада  
по направлению  
«Математика»

1 апреля 2016

Время работы: 180 минут  
Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. Какие натуральные числа представимы в виде  $x^2 - y^2 + 2x + 2y$  для некоторых целых  $x$  и  $y$ ?
2. Пусть  $\alpha(x)$  — первая цифра после запятой в десятичной записи числа  $2^x$ .
  - а) Докажите, что функция  $\alpha(x)$  интегрируема по Риману на  $[0, 1]$ .
  - б) Докажите, что  $3.5 < \int_0^1 \alpha(x) dx < 4.5$ .
3. В конечном поле произведение всех ненулевых элементов не равно единице. Докажите, что сумма всех элементов поля равна нулю.
4. В эллипсе с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  проведена хорда  $MN$ , которая проходит через фокус  $F_2$ . На прямой  $F_1F_2$  выбраны две точки  $S$  и  $T$  такие, что прямые  $SM$  и  $TN$  являются касательными к эллипсу. Точка  $D$  симметрична  $F_2$  относительно прямой  $SM$ , точка  $E$  симметрична  $F_2$  относительно  $NT$ . Прямые  $DS$ ,  $TE$  и  $MN$  при пересечении образуют треугольник  $ABC$  (точка  $C$  не лежит на  $MN$ ). Докажите, что
  - а)  $CF_2$  — медиана треугольника  $ABC$ ;
  - б)  $CF_1$  — биссектриса треугольника  $ABC$ .

*Примечание: оптическое свойство эллипса можно использовать без доказательства.*
5. Максималист и минималист по очереди вписывают по одному числу в таблицу размера  $n \times n$  (последовательно, строчка за строчкой, слева направо и сверху вниз). Каким окажется ранг получившейся матрицы, если максималист изо всех сил старается его максимизировать, а минималист — минимизировать? (Ответ может зависеть от  $n$  и от того, кто делает первый ход.)
6. Функция  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема на всей области определения. Известно, что

$$f'(x) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) + f(x)$$

для всех  $x > 1$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{e^x} = 2$ . Докажите, что  $f(2) < 20,16$ .